
教师教育新行动论丛

高观点下的初等数学

GAO GUAN DIANXIADECHUDENGSHUXUE

陈月兰 主编


华东师范大学出版社

高观点下的初等数学

陈月兰　主编

GAO
GUAN
DIANXIADECHUDENGSHUXUE

ISBN 978-7-5617-7835-7



定价：36.00 元

教师教育新行动论丛

高观点下的初等数学

陈月兰　主编

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高观点下的初等数学/陈月兰主编. —上海:华东师范大学出版社,2010.6
(新行动论丛)
ISBN 978-7-5617-7835-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①数学课—教学研究—中学 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 102965 号

教师教育新行动论丛

高观点下的初等数学

主　　编　陈月兰
策　　划　王　焰
责任编辑　吴海红
审读编辑　徐慧平
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　18.75
字　　数　355 千字
版　　次　2011 年 1 月第 1 版
印　　次　2011 年 1 月第 1 次
印　　数　2100
书　　号　ISBN 978-7-5617-7835-7/G·4561
定　　价　36.00 元

出 版 人　朱杰人

序

进入21世纪,世界各国都将提升教育质量确定为教育改革的重心,教师教育改革与创新更是成为重中之重。中国教师教育改革发展同样面临的一个核心问题,即如何把国家教师教育的战略导向和基础教育新课程改革对教师教育的要求,转化为教师教育改革实践的具体目标与措施,加快传统师范教育向现代教师教育的转变,培养造就一大批优秀教师和未来教育家。

自教师教育产生发展至今,源起于为教师提供教学法训练的学科教育,在教师培养与培训过程中一直充当着重要角色。自新中国建立以来,师范院校一直是教师教育的主阵地,因此,学科教育研究与实践的核心任务,就是研究基础教育,培养、培训中小学校教师。其遵循的一个核心原则是,对不同学科的教学规律的发现与运用,要与教育学的一般理论紧密结合起来,一般而言,教育学理论对于学科教育研究与实践具有指导作用,而学科教育反过来促进教育学理论的发展。

1986年,美国公布霍姆斯报告,新一轮教师专业化运动迅速兴起,"学科教学知识"概念应运而生。这一概念强调,学科知识既包括学科内容,也包括学科知识的逻辑结构,因此对学科知识结构的掌握,直接影响着教师传授知识的方法和效果。这就要求学科知识与教育学知识要在更深层次和更广范围上实现结合,从而对传统的学科教育理论提出了挑战。

但是,迄今为止,大多数学科教育研究与实践者仍然尊奉的是传统原则。基于各学科自身的知识逻辑,基于教师自身所需知识的逻辑结构,以及基于基础教育阶段各学科学习的认知规律和教学策略,尝试重新构建一个全新的学科教育理论框架,仍停留在一个讨论的层面。

2008年,全国学科教师教育论坛举行。教育部副部长陈小娅在论坛开幕式上作了重要讲话,要求从事学科教学研究与实践的教师,要以服务基础教育为导向,以强烈的责任感、使命感直面学科基础教育与教师教育改革的理论与

实践问题，积极开展学科教师教育的探索与创新，逐步建立起学科教师教育的研究共同体。

这样的期待，似乎并不仅仅意味着对学科教育研究与实践的激励。要改变目前学科教育在各师范院校的边缘化和研究队伍青黄不接等现状，除了各师范院校要重视学科教育的学科建设与师资队伍的建设外，学科教育也必须寻找到足以使其安身立命的新的合法性基础，即确立自身学科的理论基石与体系，积极探索形成自身的研究传统与优势。

我们也一起期待，教育界、科学界有更多的专家学者来推动和投身学科教育事业，提出更多的、更具体的理论与实践课题，为促进学科教育研究、实践和教师教育的可持续发展而共同努力。

庞辉明

2009 年 6 月 6 日

序

陈月兰博士把她的这本新作，发在我的电子邮箱里。打开一看，觉得很切中当前的需要。一个师范大学数学系的学生，如能阅读此书，一定会得益良多。

《国家高中数学课程标准》设置了许多新的内容，如算法、概率统计等；还有一些拓展性的选修课程，包括矩阵变换、差分方程、三等分角、风险与决策等等。此外，数论初步、图论等内容又成为奥赛数学的基本内容。一个中学教师，掌握这些课题，是与时俱进的一项基本专业要求。试观当前师范大学数学系所开设的课程，在知识内容上，应该说大体覆盖了以上内容。但是，这些具体课题又分散在“抽象代数”、“微分方程”、“计算数学”、“概率统计”、“离散数学”等许多课程之中，并且又往往被过度形式化的论述所淹没，没有充分展开。月兰博士的这本《高观点下的初等数学》，把上述的一些课题集中起来，更详尽地进行阐述，使之成为沟通大学数学和中学数学的一座桥梁，因而是非常有价值的工作。

杜甫的诗句云：“会当凌绝顶，一览众山小。”就事论事地看中学数学，只是知其然，用高等数学的数学方法进行解读，就会觉得豁然开朗，内心充实。我国有一句著名的教育格言是：“要给学生一杯水，教师应该有一桶水。”说的也是这层意思。

晚近以来的数学教育改革，多在教学方式上下功夫，对于数学内涵的理解，数学本质的把握，常常忽略乃至轻视，于是“去数学化”形成了一股潮流。数学教师进修的科目多半是教育理念，几乎不再关注现代数学的进展和高等数学思想的提升。一些数学教育方向的硕士生、甚至博士生，数学修养也止于数学系的本科水平，个别的甚至处于低水平。古人说：“贤者以其昭昭，使人昭昭；今以其昏昏，使人昭昭。”(《孟子·尽心下》)立意不高的数学教师，以其数学之昏昏，怎么能让学生获得数学思维能力的“昭昭”呢?。

华罗庚先生对于打好数学基础，有“从薄到厚”再“从厚到薄”的精辟论述。

这本解读，把中学数学的一些“薄薄”的内容，写得厚了起来。但是，作为读者，也许要把它咀嚼得更细些，将中学的相关内容一览无余地回归为更高层次上的“薄”。

数学教师的教育，既要有数学专业的进修，也要有教学理念的更新，并在教学实践中加以有机整合。本书是数学教师教育一项基本建设，希望能够对数学教师的成长起到有益的作用。

月兰老师在中学任教多年，后去日本因图论研究获得博士学位，继而又在大学数学教育岗位辛勤耕耘。我们曾经在一起共事，彼此熟悉。这次因她之请，写了一些感想，权作为序。

张奠宙

2010年岁尾于华东师范大学数学教育研究所

前　言

"大学学的数学如何用到中学"这是很多中学教师常常感到困惑的问题，有的甚至认为高中毕业直接可以去教高中，这些想法具有一定的代表性，我们曾对中学教师做过这样一次调查，询问当你对所教的内容感到不理解或有困难时你解决的途径主要是什么，提供的选项有上网、同事交流、教辅书、大学数学相关的内容，得到的回答基本上是同事间相互交流，几乎没有人写到要看高一级的书籍，这个答案使我们很意外，与此同时也提醒我们教大学数学数学的老师，如何提供一些对在职或未来中学教师有具体实际帮助的课程与书籍，带着这个问题我就思考着是否应该开设一门将大学数学与中学数学沟通的课程，为将来的中学教师提前做好教学准备，机会终于来了，几年之前我有幸担任了本科生《现代数学与中学数学》与研究生《高观点下的中学数学》的课程，首先根据《国家高中数学课程标准》中学数学内容来选择内容，就像目录中所示的十五章内容，在参考张奠宙、邹一沁教授所著的《现代数学与中学数学》书籍的基础上根据学生可接受程度编写讲义，力求用现代数学的思想、观点和方法对这些内容作系统的叙述，尽可能解决关于这些内容的理论问题，努力为职前和在职数学教师提供一个现代数学知识的框架，每学期上完后通过问卷方式调查教学效果，然后根据学生反馈的情况对讲义进行修改，通过不断修订、补充和积累，终于诞生了这本数的雏形。全书共分十五章，大体上可划分成两大部分，第一章至第六章作为基础部分，第七到第十五章作为拓展部分，章与章之间没有特别的逻辑关系，相对独立性较强，读者可根据自己的兴趣与需要选择。

作为现代数学与中学数学的基础，第一章较为详细地介绍了集合的一般概念，主要阐述了无限集的特征，无限集与有限集合的区别与联系，集合的公理化定义。函数是连接初中、高中和大学数学的一根重要纽带，在第二章主要探讨了不同阶段函数的不同表达形式，这种多样性旨在帮助学生从本质上理

解函数概念，并探讨了函数与对应、映射之间的区别与联系。第三章主要介绍了映射的应用，比如如何通过构造满射来解决基本的抽屉原理问题，探讨了映射与运算之间的关系、以及关系——映射——反演之间的关系。“数论”这个术语虽然未在中学数学教材中直接出现，但时时蕴含在小学、初中和高中数学内容中，为此在第四章讨论了整除与同余，介绍了现代数学中的同余关系，提出了同余关系解决中学数学问题中的优势。数学的学习离不开证明，第五章主要介绍了什么是数学证明、数学证明的主要种类，重点介绍了数学归纳法与反证法的思想与理论基础。第六章主要介绍了几何作图三大不能问题的来源，并给出了详细证明。

“对称”是中学几何图形中经常遇到的，为什么正方形比等腰三角形更对称，第七章将对“对称”概念由几何描述上升到代数刻画，从而有机地与现代数学“群”建立联系，让读者认识到“对称”不仅可以定性也可以量化，与此同时可近距离感受“群”。集合代数、命题代数、开关代数表面上不同，但透过现象我们会发现他们存在很多共性，这些共性是我们在第八章中将要探讨的布尔代数，通过本章的学习，读者会感到布尔代数并不是那么深不可测。变换不仅可以计算也可以具体表示，第九章将通过对七种初等变换的矩阵表示，让读者明白矩阵与变换之间的密切关系，体会大学《高等代数》的巨大力量，从而居高临下指导中学低阶矩阵与行列式的教与学。随着计算机科学的发展，算法成为《国家高中数学课程标准》中新内容，被列为必修，安排在《数学·必修3》中，数学中的算法与计算机课程的侧重点不同，第十章将通过具体实际例子和分析算理向读者介绍什么是算法，理解基本和常用算法。解方程常常往精确解方面考虑，然而实际中方程的近似解却更实用，第十一章将从微积分、数值计算角度对与中学关系比较紧密的实系数有理方程、超越方程以及复系数一元二次方程的解进行讨论，并介绍二分法、牛顿法等几种常用求方程近似解的方法。差分和差分方程是描述离散变量变化的重要工具，第十二章我们通过引入差分概念与性质，学习差分方程及相关应用，并体会离散变量在解决实际问题中的力量。第十三章将通过与读者熟知的欧氏几何类比的方法系统介绍球面几何，在相同与差异中感受球面几何的乐趣。“风险与决策”是《国家高中数学课程标准》中的选修内容之一，也是大学决策论要研究的，第十四章将过具体实例介绍相关概念，理解风险决策灵敏度分析的意义。通过实例了解马尔

可夫型决策及其决策方法。最后一章将向读者介绍目前活跃在应用数学中的“图论”，虽然它没有特别深奥的理论，但它与代数、几何的巧妙结合后所获得的能量变得非常强有力，本章将通过介绍图论基本概念与性质，让读者体会图论在解决实际问题中所变现出的力量。

本书可作为师范院校教师教育专业课程的教材、数学教育专业研究生的参考书，也可作为在职数学教师进修学习材料。

本书涉及的领域有数论、抽象代数、几何、组合论、决策论等非常广泛，虽然参考了大量的书籍与文献，但由于作者水平有限，书中难免会出现缺点与错误，敬请读者批评指正。

在本书即将出版之际，我要特别感谢为此书写序的张奠宙教授，感谢参加本书后五章编写的蒋德慧、田倩、陈多廷、时晨、徐咪咪和吴雅蓉，以及参与校对的冯璟和沈莲波等。

陈月兰

2010年末于华东师范大学校园

目　录

第一章 集合与无限

对于中学数学教师，集合是经常使用的一个概念. 代数、几何、统计等各方面的内容都离不开集合，但有时会产生一些疑问，如：怎么样的对象才称为集合？如何比较集合的“大小”？中学数学教材中的“集合”究竟要求到什么程度？等等. 因此我们就需要对集合有一个正确的认识.

现代数学的特点之一是统一性，它要求语言的统一和简明，这就决定了集合论的语言、思想方法以及逻辑初步成为现代数学的重要基础.

§1 集合的语言和运算

我们知道，在朴素的集合论中，集合是一个不能定义而只给予描述的原始概念，比如上海教材《数学》(高中一年级第一学期)这样写道：把能够确切指定的一些对象看作一个整体，这个整体叫做集合. 对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的(即要么属于这个集合，要么不属于这个集合).

集合论的语言中只有一个基本动词：“属于”(用$\in$表示)，由它出发，可以定义不属于($\notin$)，包含($\subseteq$)、相等($=$)、子集等概念. 再加上一些逻辑语言，如或、且、非，就可以定义集合间的运算：并($\cup$)、交($\cap$)、差($\setminus$)、余，从而建立集合论的基本运算，并形成一种代数结构. 集合论的语言与逻辑推理有密切关系，用集合表示概念、公式等数学内容时，一般有两种方式：

列举法——揭示概念外延的方式，将集合中的元素一一列出，如 $A=\{1, 3, 5, 7\}$.

描述法——揭示概念内涵的方式，即指出集合元素所满足的条件(也即 A 中元素所共有的特征性质 p：A 中每一个元素具有性质 p；具有性质 p 的元素在 A 中)，比如上述集合用描述法表示为 $A=\{n\in \mathbf{N}: n$ 为不超过 8 的奇数$\}$.

集合确定后，再通过$\subset$、$=$、$\cup$、$\cap$、$\setminus$等关系就能用集合论的语言来表示数学内容了.

关于集合的运算，有以下基本运算性质：

1. 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
2. 交换律 $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
3. 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. De Morgan 定理 设 A、B 均为 X 的子集，$X \backslash A$ 记为 A^c，则

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c;\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

5. 幂等律 $A = A \cup A = A \cap A$.
6. 对合律 $(A^c)^c = A$.
7. 余补律 $A \cup A^c = X$; $A \cap A^c = \varnothing$.

§2 集合的势

2.1 集合的幂集

定义 1.1 由集合 X 的一切子集组成的集合称为 X 的幂集，记为 $P(X)$，即 $P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

性质 1.1 若 $|X| = n$，则 $|P(X)| = 2^n$.

证明：所含不同元的元素个数为 0 的相异子集有 C_n^0 个；

所含不同元的元素个数为 1 的相异子集有 C_n^1 个；

所含不同元的元素个数为 2 的相异子集有 C_n^2 个；

一般地，所含不同元的元素个数为 k 的相异子集有 C_n^k 个 $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

上述子集都互不相同，所以 X 的所有相异子集个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

若 X 为无限集，情况会如何？这就产生了如何刻画无限集元素“多少”的问题.

如何来刻画和度量无限集的元素数量呢？自然数集、整数集、有理数集、实数集等所有无限集的元素一样多吗？如正整数的全体 $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 与正整数平方的全体 $E = \{1, 2^2, 3^2, \cdots\}$，哪一类数更多一些？有没有比实数集元素“更多”的集合？下面我们将围绕这些问题进行讨论.

2.2 有限集和无限集

听说过"希尔伯特旅店"吗？这是一个有无数多个房间的旅店，房间可以排序为 1，2，3，4，…. 一天来了一个 100 人的代表团，当然可以住下了，而且还有多余的房间. 等这些人走后，另一天来了一个有无数多个人的代表团，经理把代表也排了序，一对一，恰好住下，没有多余的房间. 结果刚安排好，又来了一位客人，怎么办？经理想了想，请这位客人住在第 1 号房间，再请原来的代表团的每个人顺次往后移一个房间，嗨！又住下了. 谁知，第 2 天来了另一个也有无数多个人的代表团，于是经理采取了大调动，请原来住下的人住序号为单数的房间，请刚来的人住序号为偶数的房间，真的还是住下了.

我们知道在中学课本中对有限集是这么定义的：含有有限个元素的集合称为有限集. 对无限集是这么定义的：含有无限个元素的集合称为无限集，或一个非空集合，若不是有限集，就称为无限集. 这样的定义方式没有揭示无限集的本质特征，根据中学生的认知特点，课本上这样的定义方式是可以理解的，但教师可以在允许的情况下，尽可能地揭示无限集的本质特征. 那么能揭示无限集的本质特征的定义是什么？答案是无限集能与自己的某些真子集一一对应.

全体自然数有无穷多个，那么全体平方数有多少个呢？我们可能马上能回答，有无穷多个. 奇数的全体有多少个？偶数的全体又有多少个？都是无穷多个！既然都是无穷多个，它们彼此之间有没有差异？能不能也比较一下多少？我们能否用集合所包含的元素的个数来刻画无限集的数量特征？显然不能(因为无限集包含无数个元素)，当然也不能用某个自然数表示.

比较两个有限集各自所含元素的多少通常有两种方法. 一种是分别数各个集合的元素个数. 设两个有限集 A、B 的元素个数分别为 m、n，如果 $m > n$，则 A 的元素多；如果 $m < n$，则 B 的元素多；如果 $m = n$，则他们的元素一样多. 另一种是报数，由此我们得到启发，可以利用一一对应的概念来比较两个无穷集合元素是否相等.

定义 1.2 如果两个集合 A、B 存在一一对应的关系，那么我们称这两个集合对等，即

$$A \text{ 与 } B \text{ 一一对应} \leftrightarrow A \text{ 与 } B \text{ 等价(记为 } A \sim B\text{)}.$$

易证对等关系是等价关系. 由于利用等价关系可以分类，因此利用对等关系可以对一切集合进行分类，即彼此对等的集合在同一类，给予一个标志，称之为势(或基数)，比如集合 X 的势记为 $\overline{\overline{X}}$.

由定义我们可以得到 A 与 B 一一对应$\leftrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

显然有限集合的势即为其所含元素的个数 ($M = \{a, b, c, d, e\} \sim \{1, 2, 3,$

4, 5}, $\overline{\overline{M}}=5$), 无限集的势是有限集元素个数的推广,规定空集的势为 0.

人们对无限集的认识经历了一个漫长而艰难的历史过程,很多人都不把无限集作为一个确定的整体存在,比如亚里士多德、高斯、柯西等. 直到 19 世纪,面对"数学分析"中建立严密的理论问题时,关于无限集合的许多问题再也避不开了,布尔查诺维护了实无穷集合的存在,并且强调了两个集合等价的概念(即两个集合的元素间存在一一对应关系). 19 世纪 70 年代初,康托尔(Georg Cantor, 1845—1918)给出了实无穷的概念:如果一个集合能与它的一部分建立一一对应,它就是无穷集. 正因为此,无限集概念成为中学数学教学的难点.

例 1 自然数集 $\mathbf{N}$ 与正偶数集 E^+ 的势相等吗?

解:因为

$$f: \mathbf{N} \to E^+,$$
$$n \to 2n,$$

将自然数集 $\mathbf{N}$ 与正偶数集 E^+ 按上述方法建立一一对应,则它们的势相同. 这说明无限集中有许多集合与自然数集有相同的势.

例 2 自然数集 $\mathbf{N}$ 与集合 $B=[0, 1]$ 的势相等吗?

答:不相等.

若自然数集 $\mathbf{N}$ 与集合 $B=[0, 1]$ 的势相等,则 $\mathbf{N}$ 与集合 $B=[0, 1]$ 存在一一对应,

$$\begin{gathered}\mathbf{N} \to B,\\ 1 \to x_1,\\ 2 \to x_2,\\ \cdots\\ n \to x_n,\\ \cdots\end{gathered}$$

则 $B=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$.

又因为 $B=[0, 1]$, 所以可用小数来表示 B 中的每一个元素:

$$\begin{gathered}x_1 = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}a_4^{(1)}\cdots,\\ x_2 = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}a_4^{(2)}\cdots,\\ \cdots\\ x_n = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}a_4^{(n)}\cdots,\\ \cdots\end{gathered}$$

其中,每个 $a_j^{(i)}$ 总是取 0 到 9 之间的整数. 为保持表示的唯一性,对于 0.299⋯我们用 0.300⋯来表示. 只有 1 可表示为 0.999⋯, 0 表示为 0.000⋯.

现在,我们来构造一个数 $x=0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ 满足以下两个条件:

(1) $b_1, b_2, \cdots b_n, \cdots$都是大于 0 小于 9 的整数;

(2) $b_1 \neq a_1^{(1)}, b_2 \neq a_2^{(2)}, b_3 \neq a_3^{(3)}, \cdots, b_n \neq a_n^{(n)}, \cdots$

而满足(1)、(2)两个条件,显然 $x \notin \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$,但是 x 为纯小数,所以 $x \in [0, 1]$. 因此 $[0, 1] \neq \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$,矛盾. 所以 N 与集合 $B=[0, 1]$ 不是一一对应,N 与集合 $B=[0, 1]$ 的势是不相同的.

从上面的两个例子,可以发现无限集的元素个数不尽相同,它们有着程度上的区别,并不像伽利略认为的无穷大量都是一样的. 事实上势也可以比较"大小",为了说明这个问题,先看下面的定理.

定理 1.1 任何无限集 A 必有一子集 B 与自然数集 N 一一对应.

证明: 任意 $a_1 \in A$, 则 $A-\{a_1\} \neq \varnothing$,

任意 $a_2 \in A-\{a_1\}$, 则 $A-\{a_1, a_2\} \neq \varnothing$,

…

重复上述操作,则可从 A 中取出一列元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,它们构成了 A 的子集 $B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots\}$,定义映射 f,

$$f: \mathbf{N} \rightarrow B,$$
$$n \rightarrow a_n.$$

可验证 f 是一一映射,从而结论成立.

这个结论告诉我们在无限集的家族中,自然数集是一个非常重要的集合,把自然数集 N 的势记为$\aleph_0$(读成阿列夫零),并用阿列夫零作为度量无限集元素数量的单位.

定义 1.3 凡是能与自然数集 N 一一对应的集合称为可列集(或称可数集).

可列集的性质:

1. A:可列集,B:可列集,则 $A \cup B$ 也是可列集.

2. A_i:可列集 $(i=1, 2, \cdots, n)$, 则 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 也是可列集.

3. 推广 A:可列集 $A_i \subset A$ $(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$, A_i 为 A 的无限真子集,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可列集.

例 3 证明正偶数集(E^+)是可列集.

证明:

$$f: \mathbf{N} \rightarrow E^+,$$
$$1 \rightarrow 2,$$
$$2 \rightarrow 4,$$
$$\cdots$$
$$n \rightarrow 2n,$$
$$\cdots$$

例 4 证明整数集 **Z** 是可列集.

证明：设自然数集为 **N**,我们如下建立对应：

$$
\begin{aligned}
f: \mathbf{N} &\to \mathbf{Z},\\
1 &\to 0,\\
2 &\to 1,\\
3 &\to -1,\\
4 &\to 2,\\
5 &\to -2,\\
&\cdots\\
2n &\to n,\\
2n+1 &\to -n,\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

则可以验证 f 是一一映射. 根据定义 1.3 得到整数集是可列集.

例 5 有理数集 **Q** 是可列集.

证明：我们像下表那样构造正有理数. 把有理数按照下列箭头排列则可以与自然数建立一一对应关系(相应的负有理数排在正有理数后面即可).

表 1 构造正有理数表

分子 / 有理数 / 分母	1	2	3	4	5	6	…
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$		
4	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$		
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$			
6	$\frac{1}{6}$				$\frac{5}{6}$		
…							

前面已经证明[0, 1]与自然数集 **N** 不对等,根据可列集定义,则[0, 1]是不可

列集. 而$[0, 1]$可以与实数集 $\mathbf{R}$ 建立一一对应关系,

$$f: [0, 1] \to \mathbf{R},$$

$$x \mapsto f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right).$$

同样可以证明$(-1, 1) \sim (-\infty, +\infty)$. 因为 $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ 是从$(-1, 1) \sim (-\infty, +\infty)$的一个一一映射.

例 6 证明$(-1, 1) \sim (a, b)$,其中 a, b 为实数.

证明:因为 $f(x) = \dfrac{x+1}{2}(b-a)+a$ 是从$(-1, 1) \sim (a, b)$的一个一一映射,所以$(-1, 1) \sim (a, b)$.

例 7 证明$(c, d) \sim (a, b)$,其中 a, b, c, d 为实数.

证明:因为 $f(x) = \dfrac{x-c}{d-c}(b-a)+a$ 是从$(c, d) \sim (a, b)$的一个一一映射,所以$(c, d) \sim (a, b)$.

由于无限集的势不一定都相同,为此集合论中给出对集合的势进行比较的规定. 通过对势的排序,将集合特别是无限集的元素数量分出许多等级,这可以使人们对无穷多的理解更深入,更精确.

定理 1.2(两个集合对等的常用定理) 设 A、B 为集合,若存在 $A_1 \subset A$,使得 $A_1 \sim B$,且存在 $B_1 \subset B$,使得 $B_1 \sim A$,则 $A \sim B$.

例 8 试证 $[a, b] \sim (-\infty, +\infty)$.

证明:因为 $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$,且$[a, b] \sim [a, b]$,又 $(a, b) \subset [a, b]$,且 $(a, b) \sim (-\infty, +\infty)$,则由定理 1.2 可知$[a, b] \sim (-\infty, +\infty)$.

类似地可证$[a, b) \sim (-\infty, +\infty)$; $(a, b] \sim (-\infty, +\infty)$,因此直线上任意一种区间与直线的元素一样多.

定义 1.4 与$[0, 1]$对等的集合称为具有连续统势的集合,其势记为$\aleph$(阿列夫),即 $\overline{\overline{[0, 1]}} = \aleph$.

由上面的例题可知实数集 $\mathbf{R}$, $[a, b]$, (a, b) $(a, b \in \mathbf{R}, a < b)$, $(-\infty, +\infty)$ 等区间都是不可列集,它们的势为$\aleph$(阿列夫).

定义 1.5 设 A、B 为集合,其势分别为$\overline{\overline{A}}$、$\overline{\overline{B}}$,如果 A 与 B 的子集一一对应(对等),则 $\overline{\overline{A}}$ 不大于$\overline{\overline{B}}$,或$\overline{\overline{B}}$ 不小于$\overline{\overline{A}}$,记为$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, 或 $\overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A}}$.

定义 1.6 (势大小定义)设 A、B 为集合,其势分别为$\overline{\overline{A}} = \alpha$, $\overline{\overline{B}} = \beta$,若 A 不对等 B,但存在 B 的子集 B_1 与 A 对等,则说集合 A 的势小于集合 B 的势(或说集合 B 的势大于集合 A 的势),记作 $\alpha < \beta$(或 $\beta > \alpha$).

由势大小定义知 $0 < n < \aleph_0$(阿列夫零)$< \aleph$(阿列夫).

关于集合势之间的关系下列性质成立:

1. 有限个互不相交的势为$\aleph$的集合的并集,其势仍然为$\aleph$,可以形象地记为:

$$\aleph + \aleph + \cdots + \aleph = \aleph.$$

2. 可数个互不相交的势为$\aleph$的集合的并集,其势仍然为$\aleph$,可以形象地记为:

$$\aleph_0 \times \aleph = \aleph.$$

3. 若集合 A_k 的势为$\aleph$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的势仍为$\aleph$, 可以形象地记为:

$$\aleph \times \aleph \times \aleph \times \cdots \times \aleph = \aleph.$$

现在已经构造两个刻画无限集数量特征的势$\aleph_0$ 和$\aleph$,且知道 $\aleph_0 < \aleph$, 对无限集,除了$\aleph_0$ 和$\aleph$外,还有其他势吗? 回答是肯定的,且有无限个不同的势,对任一势来说,必存在比它更大的势,即势无最大. 回顾幂集的概念,我们有下面的定理:

定理 1.3 设 $\overline{\overline{A}} = \mu$, $\overline{\overline{P(A)}} = 2^\mu$, 则 $2^\mu > \mu$(即$\overline{\overline{P(A)}} > \overline{\overline{A}}$).

证明: 因为 $P(A)$是 A 的幂集,则 $P(A)$的子集 $B = \{\{a\} \mid a \in A\}$ (单元素构成)与 A 对等,即

$$B \to A,$$
$$\{a\} \mapsto a,$$

$P(A)$的子集 B 与 A 对等,则根据势大小定义有 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{P(A)}}$. 若能再证 $\overline{\overline{A}}$ 与$\overline{\overline{P(A)}}$ 不对等(即它们之间不存在一一映射)则问题解决. 下面采用反证法:若集合 $P(A)$ 与集合 A 对等,则存在一一映射

$$\Psi: A \to P(A),$$
$$x \mapsto S_x,$$

因为 $S_x \in P(A)$, 则 $S_x \subset A$ (据幂集定义,即 S_x 是 A 的子集),x 与 S_x 之间的关系有 2 种情况:(1) $x \in S_x$ (内部元素);(2) $x \notin S_x$ (外部元素)(如 $A = \{1, 2, 3\}$, $x = 1$, $S_x = \{2, 3\}$). 构造 A 的子集 $T = \{x \mid x \notin S_x$,但 $x \in A\}$, 则对于任意 $x \in A$, T 不与任何 S_x 相等(因为如果 A 中的元素 x,满足 $x \in S_x$, 则 $x \notin T$, 从而 $S_x \neq T$; 如果 A 中的元素 x,满足 $x \notin S_x$, 据定义 $x \in T$, 仍然 $S_x \neq T$.), 所以 T 是A 的子集, $T \in P(A)$, 但 T 不在A 与$P(A)$的对应关系中(或者说 T 在A 中无原象,与一一映射 Ψ 矛盾)矛盾. 故 $P(A)$与 A 不能对等,即 $\overline{\overline{P(A)}} > \overline{\overline{A}}$.

由上述定理可知,我们总可以从某一个集合 A 出发,构造其幂集 $P(A)$,幂集

的势大于原集合的势,所以势没有最大者.此外还可以证明势具有三岐性.

定理 1.4 设 $P(\mathbf{N})$ 为自然数集 $\mathbf{N}$ 的幂集,则 $\overline{\overline{P(\mathbf{N})}} = \aleph$(阿列夫).

证明:因为 $\overline{\overline{[0,\ 1]}} = \aleph$,所以只要证 $P(\mathbf{N})$ 与 $[0,\ 1]$ 对等即可. $[0,\ 1] = \{x \mid x = 0.t_1t_2\cdots t_k\cdots,\ t_i \in \{0,\ 1\}\}$(任意 $x \in [0,\ 1]$,x 都可唯一地表示成二进制小数).

$$\Psi: P(\mathbf{N}) \to [0,\ 1],$$

$$u \mapsto \Psi(u) = 0.t_1t_2\cdots t_k\cdots,$$

可以证明 Ψ 是一一对应映射,则 $\overline{\overline{P(A)}} = \overline{\overline{[0,\ 1]}} = \aleph$.

设 A 为有限集,若 $\overline{\overline{A}} = n\ (n \in \mathbf{N})$,则 $\overline{\overline{P(A)}} = 2^n$. 由此得到启发,对无限集我们也沿用这种表示方法,比如 A 为无限集,且 $\overline{\overline{A}} = a$,则 $\overline{\overline{P(A)}} = 2^a$,且 $2^a > a$. 这样从最小的无限集势 $\aleph_0$ 开始,我们可以构造了一串无限集的势,为方便起见,记 $\aleph$ 为 $\aleph_1$,即 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$,同样记 $2^{\aleph_1} = \aleph_2$,$2^{\aleph_2} = \aleph_3$,…,并且有 $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$,因为无最大的势,那么就不存在包含一切集合的集合. 比如对自然数集 $\mathbf{N}$,根据上面的规定 $\overline{\overline{\mathbf{N}}} = \aleph_0$,则自然数集 $\mathbf{N}$ 的幂集 $\overline{\overline{P(\mathbf{N})}} = 2^{\overline{\overline{\mathbf{N}}}} = 2^{\aleph_0}$,而 $\overline{\overline{P(\mathbf{N})}} = \aleph$,所以 $2^{\aleph_0} = \aleph$.

§3 集合论的思想方法在中学中的应用

集合论的思想方法在中学中有很多应用,概括起来主要有以下几个方面:

1. 从集合论的高度,对中学数学内容加以概括,能更好地从整体上把握中学数学的研究对象.

中学数学的研究对象是在通常的数集 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 和通常的空间 $\mathbf{R}^1$、$\mathbf{R}^2$、$\mathbf{R}^3$ 中的数、形、式,包括数和式的运算和变形、方程和不等式的解、函数的图象和性质,研究几何图形的结构和变换、形与数之间的对应关系等等. 它们可以在集合论的观点下联系和统一起来,并归到某一种集合或集合间的某种关系去研究. 如方程的解集、不等式的解集、$\mathbf{R}^1$、$\mathbf{R}^2$、$\mathbf{R}^3$ 中满足一定条件的点集(图形、曲线).

运算、函数、序是集合上的某种关系;几何元素间的各种结合关系、平行与垂直是集合间的某种关系;平面几何中图形的平移、旋转、反射、相似等几何变换都是 $\mathbf{R}^2$ 中集合间满足一定条件的对应关系;从自然数集到整数集→有理数集→实数集的扩充过程都可通过对前一个集合按某一等价关系将该集合分类而得到.

2. 用集合论的语言表达有关概念更为简洁.

比如:$A = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 = r^2,\ r > 0\}$,表示以 r 为半径,原点为圆心的

圆周；

$A=\{(x, y) \mid 2x+y=1\}$，表示一条直线；

方程或方程组、不等式的解等，如解方程组 $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2, \end{cases}$ $A=\{(x, y) \mid x+y=4\}$，$B=\{(x, y) \mid x-y=2\}$，则 $A \cap B=\{(3, 1)\}$；

特别是表明概念间的层次关系，形成概念体系时，用集合论的语言更为清晰. 比如：

{正方形} ⊂ {矩形、菱形} ⊂ {平行四边形} ⊂ {四边形}，

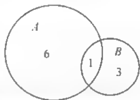
{正方形} = {矩形} ∩ {菱形}.

3. 集合论的思想方法对解题的指导作用.

许多综合问题，尤其是分类计数问题，经常可以通过集合的文氏图帮助理解，提供解题思路.

例 9 有篮球运动员 10 人，7 人能打中锋，4 人能打后卫. 今从中选出 3 中锋 2 后卫参赛，问共有多少种出场方案?

解：设 $A=$ {会打中锋的人}，$B=$ {会打后卫的人}，据题意可画出文氏图如图所示. 设 $A \cap B=$ {甲}，则按甲打中锋、打后卫、不出场三种情况，可得出场方案共有 $C_6^2C_3^2+C_6^3C_3^1+C_6^3C_3^2=165$(种).



大家可以试一下这样的问题：甲、乙、丙等 n 个人排成一列，甲不能排头，乙不能排尾，这样的排法共有多少种? (答案：$n!-(n-1)!-(n-1)!+(n-2)!$).

§4 罗素悖论

集合是什么? 中学数学教科书中是这样描述的："集合是指具有某种特定性质的事物的总体"，这一说法能否成为集合的确切定义呢? 许多时候，人们没有提出任何异议. 由于集合论语言概括性很强，含义十分广泛，因此集合论也就逐渐成为数学以及其他各个学科的基础.

实际上，这一说法并不能成为集合的确切定义. 科学家发现，如不加以限制，就会出现悖论，使自己陷于自相矛盾的境地. 为了避免悖论的出现，明确指出"所有集合的全体"不是集合. 例如"由一切集合构成的集合 M"就是一句自相矛盾的话，因为既是一切集合，那么应包含 M 在内，但 M 又是和"一切集合"都不相同的新集合，道理上说不通. 康托尔本人在 1895 年就从严格的意义上发现了这一悖论，他

曾作了证明,但没有引起大家的关注. 1903 年罗素悖论的出现,引起数学界的极大震动.

他是这么说的,世界上的集合可以分为以下两类:一类是自身不是自己的集合(正常集),如自然数集合 **N**,它的元素都是自然数,则 **N** 不是 **N** 的元素. 一般研究的集合为这类集合. 另一类自身是自己的集合(异常集),如由一切基数大于 1 的集合组成的集合,因为它的基数也大于 1,所以它本身就是自己的一个元素. 因此,任何一个集合,不是正常集就是异常集,两者必居其一. 若用 M 表示所有正常集组成的集合 $M = \{A \mid A \notin A\}$,用 N 表示所有异常集组成的集合 $N = \{A \mid A \in A\}$,那么 M 既不是正常集也不是异常集. 这是因为,若 $M \in M$,则据上述定义,$M \notin M$,矛盾. 若 $M \notin M$,则据上述定义,$M \in M$,矛盾,这就是著名的罗素悖论.

罗素还用一个"乡村理发师"的故事来解释他的这个悖论.

> 一个乡村理发师宣称他要给所有不给自己刮脸的人刮脸,而不给为自己刮脸的人刮脸.

请问他是否为自己刮脸呢? 若他为自己刮脸,根据他的声明,他就不应该为自己刮脸. 但若他不为自己刮脸,根据他的声明,他又必须给自己刮脸. 理发师陷入了左右为难的逻辑上的窘境.

悖论的根源:在于我们用包含着被定义事物的一类东西去定义该事物. 这一悖论十分简洁,却动摇了整个数学的基础. 人们怀疑我们正在进行的数学推理是否可靠. 什么是正确推理? 什么是证明? 什么是数学? 一时间似乎都成了问题,由此触发了 20 世纪初的一场大论战.

1908 年策梅罗(Zermelo, 1871—1953)采用把集合公理化的方法来消除罗素悖论,他认为并非任何一些对象都能构成集合,集合概念应该加以限制,不能随便使用. 他实行的计划是用一组公理来定义集合,这就是公理集合论的开端. 策梅罗的集合论公理一共七条,后来由于这些公理不够完善,再经佛兰克尔(A. Frankel, 1891—1965)和斯科姆(Skolm, 1887—1963)的改进,成了目前为大多数数学家所接受的公理系统,称为 ZF 公理(详见本章附录). 在这一公理系统中,排除了康托尔悖论和罗素悖论,即将羊用栏杆围起来,把已知的狼隔在外面,采取自身保护的办法.

本章思考题

1. 数学语言具体包括哪些?
2. 举例说明集合论语言在中学数学教学中的应用.
3. 无限集合与有限集合最本质的差异是什么?

4. 何谓两个集合等势?

5. 下列的解释是否正确?不正确的请说明理由.

(1) 整数集是无限集,有理数集也是无限集,所以他们的势相等;

(2) 因为实数集也是无限集,所以有理数集与实数集是等势的.

6. 判断复数集是可数集还是不可数集?

7. 简介希尔伯特旅店问题.

本章参考文献

[1] 张奠宙,邹一心.现代数学与中学数学[M].上海教育出版社,1990.

[2] 程其襄等.实变函数与泛函分析基础[M].高等教育出版社,2003.

[3] 钱珮玲等.数学思想方法与中学数学[M].北京师范大学出版社,1999.

[4] 日本数学会编辑.《岩波数学辞典》[M].岩波出版社,2007.

附录1

集合的公理

(ZF1) 外延公理:若集合 M 的元素都是集合 N 的元素,并且集合 N 的元素都是集合 M 的元素,那么 $M = N$.

(ZF2) 空集公理:即存在一集合 A,它不含任何元素.

(ZF3) 无序对公理:给定两个集合 M 和 N,我们可以找到一个集合 A,它的成员完全是 M 和 N. 我们可以叫这个集合 A 为 M 和 N 的组对(或无序对),并表示为 $\{m, n\}$.

(ZF4) 正则公理:对任何非空集合 A, A 至少有一元素 y 使 $A \cap y$ 为空集.

(ZF5) 替换公理:假定 X 是一个集合,如果对于每一个 $x \in X$ 作为第一坐标,都有一个且只有一个 y 与 x 结成有序对 (x, y),那么所有这种有序对的第二坐标 y 的全体是一个集合.

(ZF6) 幂集公理:每个集合 M 都可以对应一个集合 T, T 中包含且仅包含 M 的一切子集作为其元素.

(ZF7) 并集公理:对于每一个集合 M 和另一个集合 N,都对应一个集合 T,它包含且仅包含 M 的元素和 N 的元素作为其元素. T 可以记作 $M \cup N$.

(ZF8) 无穷公理:至少存在一个集合 A 有如下性质:① $\varnothing \in A$; ②若 $x \in A$,必有 $x \cup \{x\} \in A$.

(AC) 选择公设:

假定 $\{A_h \mid h \in H\}$ 是一个集族,这里每一个集 $A_h \neq \varnothing$,那么存在一个定义在

这集族里的变换 f：对所有 $h \in H$，$f(A_h) = x_h \in A_h$，变换 f 称为选择变换.

ZF 集合公理系统加上 AC 就成为 ZFC 公理系统.

附录2

"聪明的囚徒"

古希腊有个国王，对处死囚徒的方法做了两种规定：一种是砍头，一种是绞刑. 并且他自恃聪明地做出一个决定：囚徒可以任意说出一句话，而且这句话是马上可以验证其真假的. 如果囚徒说的是真话，那么处以绞刑；如果说的是假话，那么就砍头. 结果，许多囚徒或者因为说了真话而被绞死；或者因为说了假话而被处以砍头.

有一位极其聪明的囚徒，当轮到他来选择处死方法时，他说出一句巧妙的话，结果使这个国王按照哪种方法处死他，都违背自己的决定，只得将他放了.

答案："国王决定将我砍头."

分析：如果这和国王的决定一致，是说真话，因而按国王规定的处死方法，说真话应处以绞刑，但这样造成国王的规定(绞刑)与国王的处死方法矛盾；如果这和国王的决定不一致，说的是假话，因而按国王规定的处死方法，说假话应处以砍头，而砍头又使这句话变成真话. 国王处于进退两难的处境，只好免予死刑，将囚徒放掉.

第二章　关系与函数

和集合概念一样，关系也是日常生活、数学以及计算机科学中经常用到的一个概念. 在日常生活中，许多涉及离散对象的问题，其对象之间往往存在某种联系. 如家庭内有父子关系、母女关系；学校内有同学关系、师生关系；公司内有同事关系、上下级关系；数与数之间有相等关系、大于关系、小于关系；线面之间有平行关系、相交关系；命题之间有蕴含关系、等价关系；集合之间有包含关系、相交关系等等. 在上面的问题中主要涉及两个对象的关系，还可以推广到三个、四个乃至有限个对象之间的关系，比如“点 T 在点 P 和点 Q 之间”；又比如“考察数集 $\{1, 2, \cdots, 15\}$，如果其中三个数之和能被 5 整除，就说这三个数是相关的”. 其中 2、3、5 和 5、10、15 都是相关的；而 3、4、5 则是不相关的. 可见关系这个词在很多领域被使用，那么到底什么叫关系，如何用一个数学化的定义来精确刻画它？下面我们将从集合的笛卡儿乘积出发引出关系的定义.

§1　关系的定义

A、B 是两个集合，所谓笛卡儿乘积 $A\times B$，其实就是一个有序数偶对，即第一个坐标取自 A，第二个坐标取自 B 的所有可能的搭配. 这种两集合元素之间的搭配除了强调其有序外别无其他的约束. 如果我们给这种搭配加以某种约束条件，则体现出两集合元素之间的一种特殊的关系. 比如 X 表示横轴，Y 表示纵轴，则 $X\times Y$ 表示整个坐标平面；若加上约束条件 $y=2x+1$，则 $\{(x, y) \mid (x\in X)\wedge(y\in Y)\wedge(y=2x+1)\}$，体现出集合 X 与 Y 的元素 x，y 之间的一种线性关系. 满足某个约束的所有的搭配形成了笛卡儿乘积的一个子集，这个子集就表现了我们所说的某种关系. 用集合表达关系是现代数学的一个重要思想，下面我们给出关系的定义.

定义 2.1　笛卡儿乘积 $D_1\times D_2$ 的任何一个子集 R，称为 D_1 到 D_2 的二元关

系. 特别地当 D_1 等于 D_2 且 $R \subset D_1 \times D_1$ 时，称 R 为 D_1 中的一个二元关系.

如果 $(x, y) \in R$，则称元素 x 与 y 有关系 R，并记为 xRy；如果 $(x, y) \notin R$，则称元素 x 与 y 没有关系 R，并记为 $x\overline{R}y$.

例 1 若记 $H = \{f, m, s, d\}$ 为一个家庭父、母、子、女四个人的集合，则 H 上的同一家庭成员关系为 $H \times H$，而 H 上的长幼关系为 $H_3 = \{(f, s), (f, d), (m, s), (m, d)\}$.

当 $D_1 = D_2 = D$，即 $R \subseteq D^2$，则称 R 为 D 上的关系或普遍关系.

例 2 设 $D = \{$高中某班全体同学$\}$，则 D 上的同班关系是一个普遍关系，因为 D 中任意两个元素（学生）均有同学关系，并认为 D 中任一元素（学生）自己与自己亦有同班同学关系. 而 D 上的同事关系则是一个空关系.

在数学中，我们通常不是使用大写英文字母而是使用特定的符号来表示关系. 例如用符号"$>$"表示数与数之间的"大于"关系，用符号"$\backsim$"表示三角形之间的相似关系. 因此我们可以把符号"$>$"看成集合的名称，它的元素为序偶，序偶中的每个坐标都是实数. 如果 a 和 b 都是实数，且 $a > b$，则 $(a, b) \in >$. 所以用特征法规定关系 $>$ 如下：

$$> = \{(x, y) \mid (x \in \mathbf{R}) \wedge (y \in \mathbf{R}) \wedge (x > y)\}.$$

其中 $\mathbf{R}$ 为实数集. 比如 $(25, 13) \in >$，而 $(13, 25) \notin >$.

一般地，我们称 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 的任何一个子集为 D_1、D_2、…、D_n 的一个 n 元关系. 我们重点关注二元关系.

§2 一些特殊的关系

在集合的各种关系中，一些特殊的关系引起人们的注意，如等价关系、顺序关系等.

定义 2.2 设 R 是一个关系，且满足：(1) 自反性（对任意的 $a \in A$，均有 aRa）；(2) 对称性（若 aRb，则 bRa）；(3) 传递性（若 aRb 且 bRc，则 aRc），则称 R 为等价关系.

比如实数集上的相等关系、三角形之间的相似关系、整数集上的同余关系都是等价关系. 如果我们把两条直线相重合看作为平行的特例，那么直线之间的平行关系也是一种等价关系. 还有人与人之间的同乡关系，同学们之间的同班关系等都是等价关系.

定义 2.3 设 R 是 A 上的等价关系，$a \in A$，则 A 中等价于 a 的全体元素构成的集合称为 a 所生成的等价类，记为 $\bar{a}$，即 $\bar{a} = \{b \mid b \in A$ 且 $aRb\}$.

等价类的性质：

1. 任给 $a \in A$，总有 aRa，即 $\overline{a} \neq \varnothing$.
2. 若 $a, b \in A$，且 aRb，则 $\overline{a} = \overline{b}$，即彼此等价的元素属于同一个等价类.
3. 若 $a, b \in A$，但 $a\overline{R}b$，则 $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$.

定理 2.1 设 R 是集合 A 上的等价关系，则等价类的集合构成 A 的一个划分.

该定理说明，集合 A 上任意一个等价关系 R 定义 A 的一个划分，每一个等价类就是一个划分块，而且这种划分是唯一的. 比如单位的收发室在收到邮递员送来的报纸与信件后，总是把他们按组室分开，每一份总属于某一个组室，不会漏掉（除非有不是本单位的），而且每一份只属于某一个组室，不可能重叠. 这就是等价关系的作用，只要一个集合上存在一种等价关系，我们就可以把这个集合按这个等价关系分成一个个子集（称之为等价类），不重不漏，在每一个等价类中任意选出一个代表，可以组成一个代表团，这样对于这个集合的研究，就可以把重点放在这个代表团上. 我们从小就知道的数字 1 就是这样得到的，实际生活中，没有抽象的 1，只有具体的一个人、一张桌子、一支笔……这些具体的事物就组成了一个等价类，而数字 1 恰为这个等价类的共同特征.

顺序关系（或有序关系）与大小关系是两种不同的关系，后者是与运算有关的顺序关系. 我们知道在小学数学中的自然数，既可表示大小也可以表示次序. 同样中学数学中的整数、有理数以及实数和自然数一样既可表示大小也可以表示次序. 但是一旦数系扩充到复数，那么任意两个复数就不能比较大小了，我们自然会问这是为什么，并且还要问没有了大小是否就意味着不能排序了，下面我们就来探讨这些问题.

排序除了按数学中的大小是否还有其他方法. 我们大家都有查英文字典的经历，字典中所收词条的排列顺序，是按照它的英文字母. 其规则是：先比较各自的第一个字母，第一个字母在前的就认为整个词条也在前；若第一个字母相同，则再比较第二个字母，第二个字母在前的认定整个词条在前；第二个字母相同再比较第三个，……这样下去，任何两个不同的词条一定能分出前后.

这种"字典顺序"在数学中也是会遇到的. 如大于 0 小于 1 的有理数全体，即一切既约的正的真分数，就可以规定一种序（次序）关系：

对于任何两个既约分数，$r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$，$r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$，其中 $r_1 < r_2$，$r_1 = r_2$，$r_1 > r_2$，三者必居其一，且只居其一.

但除了这种大小顺序之外，还可以有"字典顺序". 其办法是，先比较分母（相当于第一个字母）的自然数大小，分母相同再比较分子（相当于字典顺序的第二个

字母). 例如 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{5}$,照通常“大小顺序”当然有 $\frac{1}{2} > \frac{2}{5}$,但按“字典顺序”就有相反的结果了 $\frac{1}{2} < \frac{2}{5}$. 一般地,对于既约分数 $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$,就可以规定它们的“字典顺序”.

一切既约的正的真分数按大小排列,没有最小的,也没有最大的,无头无尾. 但按字典顺序却是有头无尾的. 其首元素是 $\frac{1}{2}$,因为没有分母小于 2 的正的真分数. 接着是以 3 为分母的,共有两个,即 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$,然后是以 4 为分母的,依次下去可将所有的既约的正的真分数排序为

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$$

我们看到“大小顺序”和“字典顺序”,这两种序结构是有本质不同的,除了是否有首元素之外,还可以注意到:依大小顺序排列是稠密的,即任何两个数之间还有第三个数;但按字典顺序却没有稠密性,紧挨着的两个元素之间插不进任何别的数. 同样是所有的既约正真分数,序结构不同,集合的性质也就截然不同了.

那么究竟什么是“序”? 数学上所指的序是如下定义的:

定义 2.4 设 E 是一个集合,如果在 E 中的元素之间定义了一个关系“$<$”,满足以下四条性质:

(1) 自反性:若 $x \in E$,则 $x < x$;

(2) 反对称性:若 x, $y \in E$, $x < y$, 且 $y < x$, 则 $x = y$;

(3) 传递性:若 x, y, $z \in E$, $x < y$, 又 $y < z$, 则 $x < z$;

(4) 可比性:若 x, $y \in E$, $x \neq y$, 则必有或者 $x < y$, 或者 $y < x$.

则称 E 为有序集. 关系“$<$”具有的四条性质,也称为全序公理.

比如我们在自然数集或整数集或有理数集或实数集中的元素之间定义关系“$\leqslant$”,易验证它满足上述四条,所以自然数集、整数集、有理数集和实数集都是有序集. 同样也可以证明,开区间 $(0, 1)$ 上的既约正真分数集按大小关系“$\leqslant$”也符合这四条性质,因此 $(0, 1)$ 上的既约正真分数也是有序集. 但同时我们又知道这些集合中的元素都是可以比较大小的,但是对于复数集来说,可以按规则“先比较实部,若实部相等,则比较虚部”来说明复数集是有序集,但复数不能比较大小. 这是为什么呢? 下面就此问题进行证明,首先来证明复数集是有序集,其次说明为何不能比较大小.

证明:(一) 设任意 α, $\beta \in \mathbf{C}$, 其中 $\alpha = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $\beta = x_2 + y_2\mathrm{i}$, x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbf{R}$.

规定序：①先比较实部，若 $x_1 < x_2$，则 β 排在 α 后面；②若实部相等，则比较虚部，当 $x_1 = x_2$，若 $y_1 > y_2$，则 α 排在 β 后面；若 $y_1 = y_2$，则 $\alpha = \beta$. 用符号表示则为："$\prec$"，若 $x_1 < x_2$，或 $x_1 = x_2$，但 $y_1 < y_2 \Rightarrow (x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$，(即若 $x_1 < x_2$，规定 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$，若 $x_1 = x_2$，且 $y_1 < y_2$，则规定 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$，若 $x_1 = x_2$，若 $y_1 > y_2$，则规定 $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2)$). 可以验证，以上定义的关系"$\prec$"满足上述四条序性质.

验证：(1) $(x_1, y_1) \prec (x_1, y_1)$ (显然 $x_1 \leqslant x_1$).

(2) 即要检验，若 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$，$(x_2, y_2) \prec (x_1, y_1)$ 时能否推出 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$?

因为若 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ 或 $x_1 = x_2$ 但 $y_1 \leqslant y_2$；若 $(x_2, y_2) \prec (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_2 < x_1$ 或 $x_1 = x_2$ 但 $y_2 \leqslant y_1$. 由上面两步可以得到 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，得到 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

(3) 即要检验，若 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$，$(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3)$ 时能否推出 $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$?

因为 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ 或 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 \leqslant y_2$；同样 $(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3) \Leftrightarrow x_2 < x_3$ 或 $x_2 = x_3$ 且 $y_2 \leqslant y_3$. 由上面两步可以得到 $x_1 < x_3$ 或 $x_1 = x_3$ 但 $y_1 \leqslant y_3$，所以有 $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$.

(4) 即要验证，当任意 (x_1, y_1)，$(x_2, y_2) \in \mathbf{C}$，但 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ 时，是否可推出 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ 或 $(x_2, y_2) \succ (x_1, y_1)$?

因为①若 $x_1 < x_2$，则 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$. ②若 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$ (可以将其分为 $y_1 < y_2$ 和 $y_1 > y_2$)：

(i) 当 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 < y_2$，则 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$；

(ii) 当 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 > y_2$，则 $(x_2, y_2) \prec (x_1, y_1)$.

结合(i)(ii)有 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ 或 $(x_2, y_2) \prec (x_1, y_1)$.

综合(1)—(4)得出复数集 $\mathbf{C}$ 是有序集.

"序"关系与"大小"关系是两个概念，一般情况下，序不等于大小，当且仅当"序"关系与"大小"关系协调时，"序"才等于"大小". 下面的定义刻画了序关系与大小关系之间的联系.

定义 2.5 设 A 是定义了两个代数运算 $+$，$\times$ 的集合，且对"$+$"是有零元的有序集合，如果 A 上的一个序 $\prec$ 满足：

(1) 对加法的保序性，即 $\forall x, y, z \in A$，若 $x \prec y$，则 $x + z \prec y + z$；

(2) 对乘"正元"的保序性，即 $\forall x, y \in A$ 和正元 z，若 $x \prec y$，则 $x \times z \prec y \times z$.

就称序关系 $\prec$ 为 A 上的一个大小关系(注意这里的正元是 A 中按定义的序关系

$\prec$,排在 0 后面的元素 z,即 $0 \prec z$).

(二)复数不能比较大小的关键在于对上述定义的序关系虽然对加法运算保序,但不能与乘"正元"运算保序. 具体如下:

(1) 加法保序性成立,即若 (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbf{C}$ (复数集),且有 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$,对任意的 $(a, b) \in \mathbf{C}$,可以推出 $(x_1, y_1) + (a, b) = (x_1 + a, y_1 + b) \prec (x_2 + a, y_2 + b) = (x_2, y_2) + (a, b)$.

证明:若 $x_1 < x_2$,则 $x_1 + a < x_2 + a$. 又因为 $(x_1, y_1) + (a, b) = (x_1 + a, y_1 + b)$, $(x_2, y_2) + (a, b) = (x_2 + a, y_2 + b)$,则有 $(x_1 + a, y_1 + b) \prec (x_2 + a, y_2 + b)$. 若 $x_1 = x_2$, $y_1 \leqslant y_2$,则 $x_1 + a = x_2 + a$, $y_1 + b \leqslant y_2 + b$,同理有 $(x_1 + a, y_1 + b) \prec (x_2 + a, y_2 + b)$.

(2) 乘法保序性不一定成立.

(i) 乘正实数是成立的,即对任意 $t > 0$ (即 t 为正实数),若 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$,则 $t(x_1, y_1) \prec t(x_2, y_2)$,即 $(tx_1, ty_1) \prec (tx_2, ty_2)$.

证明:因为 $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ 或 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 \leqslant y_2$, $x_1 < x_2$, $t > 0$,则 $tx_1 < tx_2$,或 $tx_1 = tx_2$,且 $ty_1 \leqslant ty_2$,由上可得 $(tx_1, ty_1) \prec (tx_2, ty_2)$.

(ii) 但是乘"正元"的保序性不满足.

这里"正元"是指复数中按定义的序排在(0, 0)后面的数,即

$$\eta = (0, 0) \prec (x, y) \Leftrightarrow x > 0, \text{或 } x = 0 \text{ 时 } y > 0.$$

按照上面定义的序,复数 $\mathrm{i} = (0, 1)$ 是排在(0, 0)后前面的数,也就是"正数",即 $(0, 0) \prec (0, 1)$,但两边乘(0, 1)后 $(0, 0) \times (0, 1) = (0, 0)$, $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$,而根据规则 $(0, 0) \succ (-1, 0)$,这样序的方向变了,即序关系与乘法运算不保序.

综上(一)(二)所述,复数集 $\mathbf{C}$ 虽然是有序集,但不能比较大小. 值得我们注意的是也可以用其他的方法定义复数的序,比如先看"模"再看"幅角主值",同样可以证明他们满足"序"公理的四条性质,但这些序都不具有乘"正元"的保序性(按这种序为正),因此谈不上比较大小,所以复数无法比较大小.

§3 用序关系定义函数

在我们的生活中,到处可以见到变量和函数的实例,函数是中学阶段的一个重要知识内容,是反映现实世界中各种实际问题的一种重要的数学模型.

初中数学课程中,函数的定义是以具体、生动的形式出现的,称之为"变量说";到了高中或大学,则改为集合之间的对应的形式,称为"对应说";将其再抽象,用集

合的语言加以描述，又出现了“关系说”。哪种定义比较适合于中学生？如何认识函数及其相关的数学内容？如何提高学生自觉运用这一重要的数学工具的意识与能力？以及由此而引申出的有关问题，这一切都是中学数学教师应该认真加以考虑的问题.

3.1 中学数学中的函数

把函数这个词用作数学术语，最早是德国的莱布尼兹，他在 1673 年的一篇手稿里，用函数一词表示任何一个随着曲线上的点变动而变动的量. 1775 年，欧拉曾提出，如果某些变量以这样一种方式依赖于另外一些变量，即当后面这些变量变化时，前面那些变量也随之而变化，那么前面的变量称为后面变量的函数. 以后就逐渐演变为目前的函数“变量说”定义：“设 x 与 y 是两个变量，如果当变量 x 在实数的某一范围中变化时，变量 y 按照一定的规律随 x 的变化而变化，我们称 x 为自变量，y 称为因变量，即变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$.”

这种一个变量随另一个变量的变化而变化的说法有许多好处. 首先，在日常生活或生产实践中，各变量之间多半大致已经“天然地”建立了对应关系，因此，虽然变量说并未突出对应关系，却不致误会. 例如，要讨论正方形的面积 y 和边长 x 的关系，总是在同一个正方形中考虑面积值与边长值的对应，根据常识和经验，决不会把这个正方形的面积值与另一个不能合同的正方形的边长值相对应的. 其次，从物理意义上看，例如 $s = f(t)$，反映了质点运动时路程随时间变化而变化的规律，“变量说”刻画自然、形象而直观，通俗易懂，对于中学生来说，应该是较易接受的.

后来人们又采用了一种“对应说”(即映射说)，即“设 A 与 B 是两个集合，如果按照某一确定的对应关系，对于集合 A 中每一确定的元素 x，集合 B 中总有唯一一个确定的元素 y 和它对应，那么这个对应关系就叫做一个函数”. 根据这个定义，对应就是函数. 目前，这种定义也被一些教科书采用，特别是高中或大学的数学教科书. 从初中的“变量说”到高中或大学的“对应说”，这也可能是考虑到学生的接受程度与学习规律. 作为中学数学教师，在具体的教学过程中，应该有这方面的实践与体会，如何根据学生的认知水平，较好地引入函数概念，认识其本质内涵.

3.2 函数的“关系说”定义

从集合的更高层次，函数还有一种定义方式——“关系说”，看下面的定义：

定义 [illegible] 一个二元关系 $f \subseteq \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$，若满足 $(x_1, y_1) \in f$，$(x_1, y_2) \in f$，则 $y_1 = y_2$，称这个二元关系 f 为函数.

显然，函数就是两个集合的关系，但是两个集合间的关系不一定是两个集合间的函数. 比如：设 $X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{4, 5, 6, 7\}$，另 $f = \{(1, 4), (1, 6), (2,$

7), (3, 5), (3, 7)}，这里对于 X 中的元素 1，对应 Y 中的元素 4 和 6；3 对应 5 和 7，所以 f 是 X 到 Y 的关系，但不是函数. 由此可见，关系和函数虽然都是刻画关于两集合元素之间的联系，但是有区别. 函数的定义域是某个集合的全体，而不能是这个集合的真子集，而关系则不然. 在函数的定义中，对于任给的 $x \in X$，存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应；而在关系的定义中，对于任给的 $x \in X$，可以有多于一个的元素与之对应，所以函数是一种特殊的关系.

这种"关系说"比"对应说"还抽象，但它将函数用集合论的语言加以描述，是完全数学化的，便于数学研究，也便于为计算机所接受.

3.3 三种定义方式的比较

变量说直观、自然、通俗易懂，但没有突出函数的本质——对应关系. 对应说建立在集合论的基础上，更接近现代的数学语言，关键是突出了函数的本质属性. 关系说是完全数学形式化的表述，但看不见对应关系的形式和规律.

3.4 函数在中学数学中的地位和作用

式、方程、不等式、函数、数列、排列组合等有关内容构成了中学代数的主要内容，而函数在其中起到了横向联系的纽带作用. 比如：代数式 $3a$ 可以看成函数 $y = 3x$ 当 $x=a$ 时的值. 两个代数式 $f(x)$，$g(x)$ 恒等等价于函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 恒等于零；方程 $f(x) = 0$ 的根可作为函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴交点处的横坐标. 在不等式的有关问题中函数的性质常常是有利的工具. 有关函数研究的论文很多，具体可参考本章的附录.

本章思考题

1. 对数学中关系的定义你是如何理解的？这种定义方式你认为中学生是否能接受？根据你的经验谈谈你的认识.
2. 关系如何表示？举例说明.
3. 举出 5 个等价关系并说明等价关系的作用.
4. 简要说明复数为何不能比较大小.
5. 对函数的三种界定发表你的观点. 还有哪些数学概念在不同的阶段有不同的定义？

本章参考文献

[1] 张奠宙，邹一心. 现代数学与中学数学[M]. 上海教育出版社，1990.
[2] 徐利治. 数学方法论选讲(第三版)[M]. 华中科技大学出版社，2000.

[3] 王肇荣,李全灿. 离散数学初步[M]. 机械工业出版社,1987.



关于对函数研究的论文

年级	性质	作者	指导老师	论文题目
2005	教育硕士	任明俊	汪晓勤	高中生对函数概念的理解与函数概念的历史
2005	半脱产	郝妍琴	陈月兰	对高中生函数概念理解的调查研究
2005	网络 01	王美华	陈月兰	高一学生抽象函数学习障碍研究
2005	网络 02	田新红	汪晓勤	高中生对函数平移的理解
2005	教育硕士	钟志敏	李士锜	高一学生对函数对应关系的理解
2005	教育学	平　萍	李士锜	学生对反函数概念的理解
2006	教育硕士	谈雅琴	赵小平	中学生对函数概念的理解
2006	教育硕士	孙全连	李　俊	优秀生和普通生解决函数基本问题策略的比较

注:以上论文的作者均为华东师范大学教育学硕士或教育硕士.

第三章　映射与应用

§1　映射及其相关概念

映射是一个非常重要的数学概念,中学中的很多问题可以用映射这个概念加以解释,为此先回顾一下映射的定义以及相关概念.

定义 3.1　设 A, B 为集合,若对任意 $a \in A$,存在 $b \in B$,有 $f(a) = b$,称 f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射.

定义 3.2　设 A, B 为集合,f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射.若对任意 a_1, $a_2 \in A$,当 $a_1 \neq a_2$ 时,有 $f(a_1) \neq f(a_2)$(即若 $f(a_1) = f(a_2)$,则 $a_1 = a_2$),则称 f 是从集合 A 到集合 B 的一个单射.

定义 3.3　设 A, B 为集合,f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射,且 $f(A) = B$(即任意 $b \in B$,存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$),则称 f 是从集合 A 到集合 B 的一个满射.

定义 3.4　设 A, B 为集合,f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射,且 f 既是单射又是满射,则称 f 是从集合 A 到集合 B 的一个一一映射.

§2　映射与鸽笼原理

我们先来看一个非常简单的事实:把 10 本书放到 9 个抽屉里,一定至少有一个抽屉里有两本或两本以上的书.同样在 13 个人中,至少有两个人在同一个月份出生.他们的正确性很明显,这个事实的原理在数学上称为鸽笼原理(或抽屉原理).

鸽笼原理是关于由某种规划安排离散结构的存在性判断的一个基本原理,也

是图论中研究某种结构的图的存在性所需的数学工具. 抽屉原理是德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)在证明数论命题时首先提出并应用的,所以鸽笼原理又称为狄利克雷原理,共有三种形式,具体如下:

定理 3.1 如果把 m 个元素按任一确定的方式分成 n 个 ($m \geqslant n+1$, 且 m, n 为自然数)集合,那么至少有一个集合有两个或两个以上的元素.

证明:设 A_i 有限集, $A_i \subset A$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = A$, $|A| = m$, 即要证存在 $k \in \mathbf{N}$ ($1 < k \leqslant n$), 使得 $|A_k| \geqslant 2$.

(反证法)若每个集合中所含元素的数目均不超过 1,则 $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n| \leqslant n$, 即这 n 个集合中所含元素个数就不会超过 n, 与已知有 m ($m \geqslant n+1$) 个的元素相矛盾.

定理 3.2 如果把 m 个的元素,按任一确定的方式分成 n 个 ($m \geqslant n+1$, 且 m, n 为自然数)集合,那么至少有一个集合有 k 个元素,其中 $k = \left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ ([ ]为取整符号).

定理 3.3 如果把无穷多个元素,按任一确定的方式分成有穷多个集合,那么其中至少有一个集合有无穷多个元素.

上述三个定理均称为鸽笼原理,从以上可知原理本身以及他们的证明非常简单,可是正是这样一些简单原则,在初等数学乃至高等数学中有许多应用,其中有的容易,有的则非常难. 应用抽屉原理主要是解决有关属于证明存在性的问题,它的解题策略及技巧在于如何根据题设条件构造出分类的对象与分类的规则. 如果我们能从映射的角度去理解抽屉原理也许会有所新的收获.

鸽笼原理从映射的角度来说实际上是满射或非单非满的映射. 我们在解决有关抽屉原理的问题时,如果把研究的对象分成两个集合,利用"制造"满射的技巧,则有些问题会迎刃而解. 下面我们将从数、形、涂色三个角度来看如何应用抽屉原理.

2.1 鸽笼原理的应用

2.1.1 数

例 1 在数轴上任意给出几个整点,才能使得它们的奇偶性相同?

解:因为任意一个整数按奇偶数分的话,可分为两类,所以给出三个整数即可.

例 2 在平面上至少要给出几个整点(两个坐标分量都是整数的点称为整点),才能使其中至少有两个点的连线的中点仍是整点?

分析:设两个整点的坐标分别为(x_1, y_1), (x_2, y_2),由中点坐标公式 $x = \frac{x_1+x_2}{2} \in \mathbf{Z}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2} \in \mathbf{Z}$, 知当且仅当 x_1+x_2、y_1+y_2 同属于偶数,即 x_1、

x_2 同奇同偶，y_1、y_2 同奇同偶即可. 而平面一对整点的情况有 4 种：

（奇数，偶数），（偶数，奇数），（奇数，奇数），（偶数，偶数），

为使 x_1、x_2 同奇同偶，y_1、y_2 同奇同偶，则一定要再给出一点（即设法创造满射），故至少给出 5 个点，才能保证其中至少两个点的连线的中点是整点.

例 3 试问空间至少要给出几个整点，才能使其中至少有两个点的连线的中点仍是整点?

解：分析同上，9 个即可.

例 4 在$\{1, 2, \cdots, 2n\}$中任取 $n+1$ 个数，试证在取出的数中必有两数是互质的.

分析与解：构造 n 个笼子.

注意到这样一个事实：相邻两个自然数是互质的，所以可将$\{1, 2, \cdots, 2n\}$这 $2n$ 个数，按相邻两个数组成一组，则有 n 个数组$\{1, 2\}$，$\{3, 4\}$，…，$\{2n-1, 2n\}$，这就是 n 个笼子，则在$\{1, 2, \cdots, 2n\}$中任取的 $n+1$ 个数都在上述 n 个笼子中，必有两个数取自同一个数组（根据鸽笼原理），它们是互质的. 由此问题得到解决.

例 5 在 100 个连续自然数 1，2，3，…，99，100 中任取出 51 个数，证明在这 51 个数中，一定有两个数，其中一个是另一个的倍数.

分析与解：关键要构造 50 个笼子（这笼子内的数是倍数关系），使 51 个数为鸽子，则据抽屉原理至少有一个笼子内有两个数. 而任意 $x \in \mathbf{N}$（自然数），则 x 是奇数或 x 是偶数. 若是偶数，那么经过反复提取因数 2，最后总能表示为奇数乘以 $2^i (i = 1, 2, \cdots)$ 的形式，且这个奇数决不会超过原数的一半，即任意的偶数 $= 2^i \times$ 奇数，奇数 $= 2^0 \times$ 奇数，所以任意一个自然数总可表示为 $2^i \times$ 奇数的形式 $(i = 0, 1, 2, \cdots)$. 在 1～100 中，奇数的个数为 50 个（1，3，…，99），按 $2^i \times$ 奇数则可分为 50 类：

$$A_1: \{1 \times 2^i\} = \{1, 1 \times 2, 1 \times 2^2, \cdots, 1 \times 2^6\};$$
$$A_2: \{3 \times 2^i\} = \{3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, \cdots, 3 \times 2^5\};$$
$$A_3: \{5 \times 2^i\} = \{5, 5 \times 2, 5 \times 2^2, \cdots, 5 \times 2^4\};$$
$$\cdots$$
$$A_{25}: \{49 \times 2^i\} = \{49, 49 \times 2\};$$
$$A_{26}: \{51 \times 2^i\} = \{51\};$$
$$\cdots$$
$$A_{50}: \{99 \times 2^i\} = \{99\}.$$

100 个数没有遗漏地被放在 50 个集合中，无论用何种方法从中取出 51 个数时，必然有至少有 2 个数是出自同一个集合，而同一集合的两数，大数必定是小数的倍数.

本例题可以拓展为一般化,具体可参考本章的思考题.

例6 一个集合含有10个互不相同的两位数,试证这个集合必有两个无公共元素的子集合,此两子集合中各数之和相等.(1972年第14届国际数学奥林匹克试题)

分析与解:

(1) 一个有着10个元素的集合,它共有多少个可能的子集呢?

由于在组成一个子集的时候,每一个元素都有被取过来或者不被取过来两种可能,因此,10个元素的集合就有 $2^{10}=1024$(种)不同的构造子集的方法,也就是,它一共有1024个不同的子集,包括空集和全集在内.空集与全集显然不是考虑的对象,所以剩下 $1024-2=1022$(个)非空子集(看成鸽子数).

(2) 再来看各个子集中一切数字之和.用 N 来记这个和数,则设 X 为满足上述条件的集合,$X=\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$,$a_i\in\{10, 11, \cdots, 99\}$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$,

$$10\leqslant N=\sum a_i\leqslant 91+92+93+94+95+96+97+98+99=855,$$

最大为855,最小为10,这表明 N 至多只有 $855-9=846$(种)情况,见表1,即所有子集元素之和的可能只有846种(看成笼子数).

表1

所有子集元素之和的可能只有846种	N_1	N_2	N_3	…	N_{846}
可能值	10	11	12	…	855

集合种类有1022种	X_1	X_2	…	X_{1021}	X_{1022}
每个集合元素之和一定不会超出上述846种	N_i	N_j	…	…	N_k

由于非空真子集的个数是1022,$1022>846$,所以其中一定存在两个子集 A 与 B,使得 A 中各数之和 $=B$ 中各数之和.若 $A\cap B=\varnothing$,则命题得证;若 $A\cap B=C\neq\varnothing$,即 A 与 B 有公共元素,这时只要剔除 A 与 B 中的一切公共元素,得出两个不相交的子集 A_1 与 B_1,很显然,A_1 中各元素之和 $=B_1$ 中各元素之和,因此 A_1 与 B_1 就是符合题目要求的子集.

本例能否推广为如下命题:已给一个由 m 个互不相等的 n 位十进制正整数组成的集合,求证:这个集合必有两个无公共元素的子集合,各子集合中各数之和相等.

这个问题请读者自己来研究.

例7 一个棋手用11个星期来准备参加一次大型比赛,为了准备得更加充分些,他决定每天至少下一局棋,但是为了使自己不至于太紧,他又决定在任何一周

内下棋的总局数不超过 12,求证:一定存在着连续的若干天,在此期间内该棋手恰好下了 21 局.

分析与解:设法构造笼子和鸽子.

设 a_i 表示这位棋手第 i 天所下棋的局数.据题意每天至少一局,则 $a_i \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant 77)$.另外又要把第一天,第二天,……,到第 i 天的局数累加,故设为 x_i,显然

$$x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i = \sum_{k=1}^{i} a_k,\ (1 \leqslant i \leqslant 77)$$

则 $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{77} \leqslant 12 \times 11 = 132$(因为一周最多下 12 局,所以 11 周最多 132 局),令 $y_i = x_i + 21 = \sum_{k=1}^{i} a_k + 21$,则

$$22 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_{77} \leqslant 153,$$

这样就构造了 $x_1, x_2, \cdots, x_{77}, y_1, y_2, \cdots, y_{77}$,共 154 个整数,而这些数均为 1—153 中的数.据抽屉原理其中至少有两个数相等,因为 x_i 互不相等,y_i 互不相等,所以只能在两列中各选一个,即存在 $s, t \in \mathbf{Z}$,使得 $1 \leqslant s, t \leqslant 77$,$x_s = y_t = x_t + 21$,则 $s > t$,且 $x_s - x_t = 21$,即从第 $t+1$ 天至第 s 天,这连续的 $s-t$ 天内,该棋手恰好下了 21 局棋.

例 8 设用百分制记分,且得分只能是整数,证明:

(1) 若 201 人的总分为 9999,则至少有 3 人的得分相同;

(2) 若 201 人的总分为 10 101,则至少有 3 人的得分相同;

(3) 若 201 人的总分为 10 000,且已知无 3 人的得分相同,则必有 1 人得 100 分、2 人得 0 分;

(4) 若 201 人的总分为 10 100,且已知无 3 人的得分相同,则必有 1 人得 100 分、2 人得 0 分.

分析与解:因为学生的分数是整数的情况故共有 101 种,即 0 分,1 分,2 分,…,99 分,100 分;学生的人数为 201 人,所以可以将 201 人看成鸽子,101 种分数情况看成笼子,见表 2:

表 2

笼子 101 个		0 分	1 分	2 分	…	98 分	99 分	100 分
鸽子 201 只	最大	1 人	2 人	2 人	…	2 人	2 人	2 人
	最小	2 人	2 人	2 人	…	2 人	2 人	1 人

假设无 3 人得分相同,即没有 3 鸽同笼,因为 $p = \left[\frac{m-1}{n}\right] + 1 = \left[\frac{201-1}{101}\right] +$

$1 = 1+1 = 2$，所以必存在一个满射，使得每个笼里有鸽子，其中 100 个笼里是 2 个，一个笼里是 1 个. 每个笼里的人员安排按可能的最大分值和与最小分值和来进行排列：

$\sum$ 最大分值：2 人得 1 分，2 分，…，99 分，100 分，余下 1 人得 0 分，

$$\sum = 1\times 0 + 2\times(1+2+3+\cdots+100) = 10\,100; \qquad ①$$

$\sum$ 最小分值：2 人得 0 分，1 分，…，99 分，余下 1 人得 100 分，

$$\sum = 2\times(0+1+2+\cdots+99)+100 = 10\,000. \qquad ②$$



估计的最小和为 10 000，比题设"201 人的总分为 9999"还要大，估计的最大和为 10 100，比题设"已知 201 人的总分为 10 101"还要小. 这两种现象是不可能的（估计的范围没有包括题设）所以矛盾. 从而结论(1)(2)成立.

已知无 3 人的得分相同，要使 201 人的总分为 10 000，那么根据鸽笼原理，再根据上面的运算，则每个分数的人员安排如②，这和所要证明的结果(3)一致，由此问题(3)得到解决.

已知无 3 人的得分相同，要使 201 人的总分为 10 100，那么根据鸽笼原理，再根据上面的运算，则每个分数的人员安排如①，这和所要证明的结果(4)一致，由此问题(4)得到解决.

例 9 一个国际社团的成员来自六个国家，共有成员 1978 人，用 1，2，3，…，1978 编号，请证明：该社团至少有一个成员的编号数与他们两个同胞的编号数之和相等，或是一个同胞的编号数的 2 倍.

证明：使用反证法. 设满足条件的编号数不存在，换言之，任何同一国中的任何两成员的号码之差决不会是该国成员的号码. 因为倘若不然，设某国的两成员的号码分别为 a，b，则 $a-b$ 也是该国成员的号码，则当 $a-b\neq b$ 时，a 是同国两成员号码之和；当 $a-b=b$ 时，a 是同国成员号码的两倍($2b$)，与题设不符.

国家	A	B	C	D	E	F
	330					

由于 $p_1 = \left[\dfrac{1977}{6}\right]+1 = 330$，据鸽笼原理，必有一个 A 国，其中至少有 330 个

成员，设 m_1 是 A 国中成员的最大号码，用 m_1 减去其余 A 国成员的号码，得到至少 329 个数，由假设，它们都不是 A 国成员的号码，因而是其余五国成员的号码.

又由于 $p_2=\left[\frac{328}{5}\right]+1=66$，据鸽笼原理，必有一个 B 国，其中至少有 66 个成员，记其号码中最大的为 m_2，用 m_2 减去其余 65 个号码，所得的 65 个数都不是 B 国成员的号码，且它们也必都不是 A 国成员的号码，因为若 b 是这 65 个号码之一，$b\neq m_1$，则必存在 A 国成员的号码 a_1、a_2，使得 $m_2=m_1-a_1$，$b=m_1-a_2$ 成立，于是 $m_2-b=a_2-a_1$，由假设 S，它不是 A 国成员的号码. 同理可算得

$$p_3=\left[\frac{64}{4}\right]+1=17,\ p_4=\left[\frac{16}{3}\right]+1=6,$$

$$p_5=\left[\frac{5}{2}\right]+1=3,\ p_6=\left[\frac{2}{1}\right]+1=3.$$

因此，最后找到一个国家 F，其中至少有两个成员的号码之差不是任一个国家成员的号码，这是不可能的. 这个矛盾就说明题目的断言是正确的.

2.1.2 形

例 10 已知单位长度的线段内有 6 个点，则至少存在两个点，它们之间的距离不大于 $\frac{1}{5}$.

分析：只要将单位长度 5 等分即可.

例 11 在边长为 1 的正方形内任意放 5 个点，则至少有两个点之间的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

分析：将正方形分割成 4 个全等的图形，经检验只有图 3 符合要求.

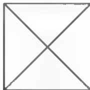

图 1


图 2


图 3

例 12 在边长为 2 的正三角形内(图 4)，任意放 5 个点，则至少有两个点之间的距离不大于 1.

分析与解：只要造 4 个笼子即可.

取正三角形 ABC 各边的中点 D、E、F 并连结，得到 4 个小正三角形：$\triangle AED$，$\triangle BEF$，$\triangle DFC$，$\triangle DEF$，如图 5 所示，在上面任意放 5 个点，则至少有

两点落在同一个小正三角形中，而这些小正三角形内两点之间最长的距离为 1，所以至少存在两点，它们之间的距离不大于 1.

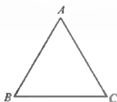


图 4

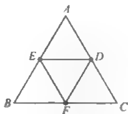


图 5

例 13 在边长为 1 的正六边形内(图 6)，任意放 25 个点，则至少有两个点之间的距离不大于$\frac{1}{2}$.

分析与解：因为给出 25 个点，所以只要造 24 个笼子即可.

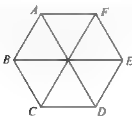


图 6

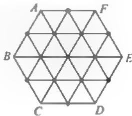


图 7

将已知的正六边形的边长两等分，构造出 24 个全等的边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正三角形，如图 7 所示，在上面任意放 25 个点，则至少有两点落在同一个小正三角形中，在这些小正三角形内两点之间最长的距离为$\frac{1}{2}$，所以结论得证.

练习 在边长为 1 的正方形内任意投入 9 个点，试证其中必有三点，以这三点为顶点的三角形面积不超过$\frac{1}{8}$.

例 14 某旅游团一行 50 人，游览某地的甲、乙、丙三处，若每处每人都可去可不去，试证其中至少有 7 人游览甲、乙、丙三处的方式(如：去过甲、乙两处而未去丙处)完全相同.

解：每人游览甲、乙、丙三处的方式有 $2^3=8$(种)，该旅游团共有 50 人，据抽屉原理，$\left[\frac{50-1}{8}\right]+1=6+1=7$，即至少有 7 人游览三处的方式相同.

2.1.3 涂色

例 15 若用 2 种颜色对 3×7 组成的格子涂色，则至少存在一个长方形其四角同色.



解法一：从行考虑，先看第一行 7 个格子，用两种颜色涂，则至少有 $\left[\frac{7-1}{2}\right]+1=4$(个)格子同色，把四个格子放在一起，不妨设为红色，再看 4×3 的格子. 若第二行和第三行中出现 2 个或 2 个以上红色格子，则该行的两个红色格子与第一行的红色格子就组成一个 4 角全为红色格子的矩形. 若不然，则第二、三行中都至少有 3 个蓝色格子，不妨设前 3 格为蓝色，显然在第三行的前三个格子至少有 2 个格子(若不然，则为红，则要与第一行组成矩形结论成立). 所以在第 2、3 行的前 4 列中必存在四角都为蓝色的矩形.

解法二：从列考虑三个格子其中两个同色，这种可能 C_3^2. 这样的情况有 $2\times C_3^2=6$(种)，而现在有 7 列，所以至少存在两对排列相同，那么存在一个长方形其四角同色.

同样内容以其他形式如下：21 个学生站 3 列纵队，每列 7 人，求证：可以从中找出一个小矩形方队，其四角都是男生或女生.

例 16 若用三种颜色对 4×☐ 组成的格子涂色，且不管怎么涂，总有一个长方形，其四角同色，则☐最小为多少？

分析与解：方法与例 15 类似，从列考虑涂色，设三种颜色为红、黄、蓝，分别用 r、y、b 表示，已知每列有 4 个格子，现在用 r、y、b 三种颜色涂，则其中必有两格同色.

(1) 若同色的两格为红，则两格红色不同的图法只有 6 种，即

$$rryb,\ yrrb,\ ybrr,\ ryrb,\ rybr,\ yrbr;$$

(2) 若同色的两格为黄，同(1)，则两格黄色不同的图法也只有 6 种；

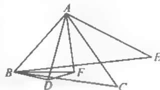
(3) 若同色的两格为蓝，同(1)，则两格蓝色不同的图法也只有 6 种；

综合(1)～(3)，一共可以涂成不同的 18 列，即在 4 行 18 列构成的格子板中用红、黄、蓝三色图找不到任何一个长方形其四角同色. 如果再加一列，同样用这三色涂，则不管怎么涂一定会再现上面 18 种的某一种，那么也就找到了四角同色的长方形，所以最少为 19 列.

2.1.4 同色三角形

例 17 平面上有 6 个点，用 2 种颜色（红色、蓝色）连结线段，证明不管怎么涂，总存在一个同色三角形.

分析：考虑从 A 点出发共有 5 条线段，2 种颜色连结，则其中有 $\left[\frac{5-1}{2}\right]+1=3$（条）线段同色. 不妨设 AB、AD、AF 均为红色，下面考虑线段 BD、DF、BF.



（1）若这三条中有一条为红色，如 BD，则 $\triangle ABD$ 为同色三角形；

（2）要不然三条边均为蓝色，则 $\triangle BDF$ 为蓝色三角形.

此题与"任意 6 个人中或者有 3 人互相认识，或者有 3 人互不认识"本质是同一个.

例 18 空中有 17 个点，用三种颜色连结，试证不管怎么涂，总存在一个同色三角形.

证明：（1）先选定一点，以此为顶点与其他每一点连结，共有 16 条线段.

（2）用三种颜色连结这 16 条线段，则至少有 $\left[\frac{17-1}{3}\right]+1=6$（条）同色.

（3）若这 6 条线段的另一端点（6 点）两两之间的连线中有一条与上同色，则结论成立.

（4）若这 6 点两两之间的连线中没有一条与上同色，则可能涂另外两色，此问题转化为例 17，即 6 点用两色线段连结，必存在一个同色三角形（已证）. 因此，结论成立.

定义 3.6 一个图共有 n 个点，如果每一个点均与其他的点连结，称这样的图为 n 阶完全图，记为 K_n.

定理 3.4 双色完全图 K_6 中至少有一个单色三角形.

定理 3.5 双色完全图 K_6 存在两个单色三角形.

证明：设双色（红色与蓝色）完全图 K_6 的结点为 $V_1, V_2, \cdots, V_6$，由定理 3.4 可知双色 K_6 中至少有一个单色三角形. 不妨设 $\triangle V_1V_2V_3$ 是一个红色 K_3，并假设结点 V_4 与 V_5 连结的边为蓝色，下面考察结点 V_4 与结点 V_1、V_2、V_3 连结所构成的边的集合 $A=\{[V_4, V_1], [V_4, V_2], [V_4, V_3]\}$，以及结点 V_5 与结点 V_1、V_2、V_3 连结所构成的边的集合 $B=\{[V_5, V_1], [V_5, V_2], [V_5, V_3]\}$，若 A 或 B 中各有两条红边，那么它们与 $\triangle V_1V_2V_3$ 中的某一条红边构成一个红色 K_3，即存在第二个单色三角形，否则 A 与 B 中都至少有两条蓝边，因此 $A\cup B$ 中就至少有 4 条蓝边. 将 $A\cup B$ 中的 6 条边再分成下列三组：

$\{[V_4, V_1], [V_5, V_1]\}$, $\{[V_4, V_2], [V_5, V_2]\}$, $\{[V_4, V_3], [V_5, V_3]\}$,

则每组中的两条边都与边$[V_4, V_5]$构成一个 K_3. 以这三个组作为 3 个笼子,则 $A \cup B$ 中的 4 条蓝边都在其中,由抽屉原理可知,必有一组的两条边都是蓝边,于是这两条边就与已知蓝边$[V_4, V_5]$构成一个蓝色 K_3,即存在第二个单色三角形,故双色 K_6 存在两个单色三角形.

定理 3.6 双色完全图 K_7 中至少有三个单色三角形.

证明:设 K_7 的结点为 $V_1, V_2, \cdots, V_7$,考虑双色 K_7 的一个 K_6 子图. 由定理 3.4 可知,该双色 K_6 至少有一个单色三角形,不妨设为$\triangle V_1V_2V_3$,再考虑双色 K_7 以 $V_2, V_3, \cdots, V_7$ 为结点的 K_6 子图. 由定理 3.5 知,该双色 K_6 存在两个单色三角形,且都不以 V_1 为顶点,故双色 K_7 至少有三个单色三角形.

定理 3.7 双色完全图 K_7 存在四个单色三角形.

证明:设 K_7 的结点为 $V_1, V_2, \cdots, V_7$. 由定理 3.6 可知,双色完全图 K_7 中至少有三个单色三角形,这三个单色三角形共 9 个顶点,都是$\{V_1, V_2, \cdots, V_7\}$中的点,由抽屉原理可知,其中至少 $\left[\frac{9-1}{7}\right]+1=2$ 个顶点取的是 K_7 的同一个结点,因此有两个单色三角形存在公共顶点,不妨设该公共顶点为 V_1,再考虑双色 K_7,以 $V_2, V_3, \cdots, V_7$ 为结点的 K_6 子图. 由定理 3.5 知,该双色 K_6 存在两个单色三角形,且与以 V_1 为公共顶点的另两个单色三角形不同. 故双色完全图 K_7 存在四个单色三角形.

对双色完全图 K_8, K_9, …的单色三角形存在性问题也是如此.

定理 3.8 设 m 色完全图 K_n 存在单色三角形,则当 $q=(m+1)(n-1)+2$ 时,$m+1$ 色完全图 K_q 也存在单色三角形.

证明:设 K_q 的结点为 $V_1, V_2, \cdots, V_q$,考虑从 V_1 出发的各条边,共有 $q-1=(m+1)(n-1)+1$ 条,现将这些边涂以 $m+1$ 种颜色,则至少有 $\left[\frac{(m+1)(n-1)+1-1}{m+1}\right]+1=n$ 条边涂的是同一颜色. 不妨设(V_1, V_2), (V_1, V_3), …, (V_1, V_{n+1})这 n 条边涂的都是第 $m+1$ 种颜色. 考虑 K_q 的以 $V_2, V_3, \cdots, V_{n+1}$为结点的子图 K_n.

若该 K_q 中存在涂有第 $m+1$ 种颜色的边 $[V_i, V_j]$ $(2 \leqslant i < j \leqslant n+1)$,则 $\triangle V_1V_iV_j$ 就是$m+1$ 色完全图 K_q 的一个单色三角形. 否则,该 K_n 中的各边只有 m 种颜色,由题设可知,该 K_n 存在单色三角形,而它作为 K_q 的一个子图,它的单色三角形当然也是 K_q 的单色三角形,即命题成立.

该定理是多色完全图关于单色三角形存在性的一个推进性定理. 作为定理 3.8 的一个应用,我们能很容易得到:因为单色 K_3 本身的存在性 $(m=1, n=3)$,

根据定理 3.8 知，$q = (m+1)(n-1)+2 = 2\times2+2 = 6$，从而可推出双色 K_6 $(m=2,\ n=6)$ 存在单色三角形，进而又可推知 $q=(m+1)(n-1)+2 = 3\times 5+2=17$，即三色 K_{17} 存在单色三角形.

例 19 有 17 位科学家，其中每一位都与其他 16 人通信，他们在通信中，只讨论 3 个问题，而每两人之间只讨论其中一个问题，试证至少有三位科学家相互之间讨论的是同一个问题.

证明：转化为数学问题.用 17 个点 $V_1, V_2, \cdots, V_{17}$ 表示 17 位科学家.因为每两位科学家都要通信，相应每两个结点都用一条边连结，由此得到一个完全图 K_{17}，用三种颜色表示三个问题，若两位科学家之间讨论的是第 i 个问题，则把相应的两个结点之间的边涂上第 i 种颜色 $(i=1, 2, 3)$，由此进而得到一个三色完全图 K_{17}，由上述讨论可知，三色完全图 K_{17} 中存在单色三角形，再由涂色方案可知，该单色三角形的三个顶点对应的三位科学家相互之间讨论的是同一个问题.

例 20 平面上有 6 个点，任何 3 点都是不等边三角形的顶点，证明这些三角形中有一个三角形，它的最短边同时又是另一个三角形的最长边.

证明：把 6 点中每两点都用一边相连，然后把 6 点中每 3 点作为顶点的所有三角形中的最长边涂上红色，其余的边均涂上蓝色，作出一个双色完全图 K_6，由定理 3.4 可知：该双色完全图 K_6 中存在单色三角形，由形成该双色完全图 K_6 的涂色方案可知，每个三角形中至少有一条红边.因此该单色三角形必是红色 K_3，而它的最短边因为涂的是红色，由涂色方案可知又是另一个三角形的最长边.

例 21 在平面内有 15 个点，每三点中必有两点距离小于 1，则从中至少可找到 8 个点，它们均落在半径为 1 的一个圆内.

证明：任选一点 A，若所有其他点距离 A 均小于 1，则命题已得证，否则必存在另一点 B，使得 $AB>1$，构造抽屉：$X=\{A_i \mid A_iA<1\}$，$Y=\{B_i \mid B_iB<1\}$，$|A_i|+|B_i|=15$. 而 $\left[\dfrac{15-1}{2}\right]+1=8$，所以至少可找到 8 个点，它们均落在半径为 1 的一个圆内.

例 22 平面上有无穷多个点，其中任三点中两点距离小于 1，则存在一个单位圆，圆内有无穷多个点.

证明：任选一点 A，若所有其他点到 A 的距离均小于 1，则命题已得证；否则必存在另一点 B，使得 $AB>1$，构造抽屉：$X=\{A_i \mid A_iA<1\}$，$Y=\{B_i \mid B_iB<1\}$，$X\cup Y$ 有无穷多个点，则 X 有无穷个点或 Y 有无穷个点，即结论成立.

§3 映射与运算

学数学几乎每天都要接触运算，在小学我们运算的对象是数，使用的方法是加、减、乘、除. 随着年级的增高我们发现，代数式、函数、向量、矩阵、线性变换等看上去不像传统数的事物，也可以用类似普通计算的方法来加以运算，那么到底什么是数学运算？它又包括哪些？

数学上，运算是一种行为，通过已知量的可能的组合，获得新的量. 运算的本质是集合之间的映射.

例如，算术中的加法 $5+3=8$，这里 5 和 3 是输入，8 是结果，而加号"+"表明这是一个加法运算. 本质上是 $A\times B\to C$ 形式的映射. 下面给出代数运算定义：

定义 3.6 设 A、B、D 为集合，一个 $A\times B$ 到 D 的映射叫做 $A\times B$ 到 D 的代数运算.

例如：$A=\{$所有整数$\}$，$B=\{$所有不等于零的整数$\}$，$D=\{$所有有理数$\}$. 则

$$*:(a,\ b)\to\frac{a}{b}=a*b,$$

是一个 $A\times B$ 到 D 的代数运算，也就是普通的除法.

$A\times B$ 到 D 的一般代数运算用到的较少. 最常用的代数运算是 $A\times A$ 到 A，看下一个定义：

定义 3.7 假如 $*$ 是一个 $A\times A$ 到 A 的代数运算，我们就说，集合 A 对于代数运算"$*$"来说是封闭的，也说 $*$ 是 A 的代数运算或二元运算.

例如：

(1) 实数的加法、减法、乘法是 $\mathbf{R}$ 的代数运算.

(2) 多项式的加、减、乘都是多项式集的代数运算.

(3) 三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中两个向量的数量积是从 $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 的代数运算，而向量积是从 $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 的代数运算.

除了上述常见的运算之外，还有许多其他的运算. 比如开根运算，对数，三角运算，反三角运算，求导运算，积分运算，取整运算等等. 这些运算可以看成是"算子"的作用. 所谓算子，可以看成是作用在运算元素上的函数符号. 比如开根运算的算子就是根号，积分运算的算子就是积分号.

同样的我们也可以把排列、组合运算看作映射，这样对普遍感到比较难理解的排列组合由于换了一个角度思考也许会比原来方便.

在第二章中我们提到函数，现在研究映射，它们之间有一定的关系．映射是比函数更广泛一些的数学概念，它就是一个集合到另一个集合的一种确定的对应关系，即若 f 是集合 A 到集合 B 的一个映射，那么对 A 中的任何一个元素 a，集合 B 中都存在唯一的元素 b 与 a 对应，我们称 a 是原像，b 是像．写作 $f: A \to B$，元素关系就是 $b = f(a)$．

映射与函数不尽相同，相同点包括：(1)函数与映射都是两个非空集合中元素的对应关系；(2)函数与映射的对应都具有方向性；(3)A 中元素具有任意性，B 中元素具有唯一性．不同点包括：(1)函数是一种特殊的映射，它要求两个集合中的元素必须是数，而映射中两个集合的元素是任意的数学对象；(2)函数是包含在映射里的．

顺便提一下，一个带有运算的集合称为代数系统，比如抽象代数中的群，环、域都是代数系统．

§4　作为科学方法的映射观点

4.1　关系——映射——反演

关系——映射——反演原则简称 RMI 原则．

它是由徐利治先生提出的，其结构如图 1 所示，其实它是化归的最一般化描述．



图 1

以数形结合为例，其关系——映射——反演的结构如图 2 所示．



图 2

例 23 计算：$2.31^3\times\sqrt[5]{72}$.

分析与解：设 $T=2.31^3\times\sqrt[5]{72}$，则 $\lg T = 3\lg 2.31+\frac{1}{5}\lg 72=1.4623$，$T=28.99$，此题关系——映射——反演的结构如图 3 所示.

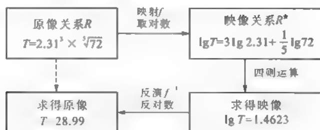


图 3

引起重视的是关系——映射——反演原则是学习和研究数学的一种重要方法，既能启发解题思路处理个别问题，又可用来指导数学发现，在理论上作出重要贡献. 数学方法有不同的层次，关系——映射——反演原则是高层次的数学方法，数学模型方法、数形结合方法、同解法、解析法、三角法、复数法、向量法等都是关系——映射——反演原则在不同层次上的应用. 这里的难点是映射 f，一个好的映射才能化难为易，化繁为简；另一个难点是反演，对“像”的研究结果要求能翻译成“原像”的结果. 选择 f 时应注意以下几点：

(1) f 应该是可定映射，即从映像关系结构 R^* 里，能顺利确定未定目标，X 的映像 $X^*=f(x)$ 的有关属性，如数量、形式或某些性质等.

(2) f 应是可逆映射，即 f 的逆映射必须 f^{-1} 存在，这样才能将 X^* 经过反演回到 X.

(3) f 应具有较好的可行性，即所选取的映射 f 要便于由 R 确定 R^*.

4.2 中学中常用的“关系——映射——反演”

4.2.1 换元法(线性代换、对数、三角、复变量、倒数、根式等)

例 24 解方程：$x^4-x^2-2=0$.

分析与解：双二次方程，令 $y=x^2$，则原方程可化为 $y^2-y-2=0$，解得 $y_1=2$，$y_2=-1$. 还原 $x=\pm\sqrt{y}$，则原方程解为 $x_1=-\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2}$，$x_3=\mathrm{i}$，$x_4=-\mathrm{i}$.

例 25 在复数集内解方程 $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$.

解：两边同除 x^2 得 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$. 令 $x+\frac{1}{x}=y$，则原方

程可化为 $6y^2+5y-50=0$，解得 $y_1=\frac{5}{2}$，$y_2=-\frac{10}{3}$. 还原得 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=-3$，$x_4=-\frac{1}{3}$.

例 26 已知 $\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}x=\sin(x^3-1)$，求 $f(x)$.

解：令 $t-x=u$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(t-u)$.

$$\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}x=\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u=\sin(x^3-1),$$

$$f(-x)=3x^2\cos(x^3-1),$$

$$f(x)=3x^2\cos(x^3+1).$$

例 27 已知 $\sqrt[3]{14+x}+\sqrt[3]{14-x}=4$，求 x.

解：令 $\sqrt[3]{14+x}=u$，$\sqrt[3]{14-x}=v$，则 $u+v=4$，$u^3=14+x$，$v^3=14-x$，$u^3+v^3=28$，

$$(u+v)^3=u^3+v^3+3u^2v+3uv^2=u^3+v^3+3uv(u+v)=28+3uv\times 4.$$

即 $4^3=28+12uv$，$uv=3$，再结合上面的 $u+v=4$，可求得 $u=3$，$v=1$.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{14+x}=3,\\ \sqrt[3]{14-x}=1,\end{cases}$$

解得 $x=13$.

4.2.2 初等变换法(对称变换、平移变换、旋转变换等)

例 28 如图 4，设 A、B 是定直线 l 同侧的两定点，在 l 上求一点 P，使 $AP+BP$ 最短.

分析与解：显然只要找 A 点关于直线 l 的对称点 A'，然后连结 $A'B$，则 $A'B$ 与 l 的交点就是要找的点 P.

图 4

4.2.3 简单的仿射变换

在仿射平面中，双曲线是与无穷远直线相交的椭圆，抛物线是与无穷远直线相切的椭圆，而椭圆又可以仿射变换为圆. 因此，所有二次曲线都可转化为圆，因而就可以利用圆的仿射性质来解决其他二次曲线的问题. 下面介绍简单的仿射变换——均匀压缩变换(普罗克鲁斯蒂)，它保持了仿射变换的所有不变性(保同素性、保点性的关联性，保平行性、保共线的线段比例和保面积比等). 另外还有一些新的性质.

例 29 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接三角形面积的最大值.

解：利用均匀压缩变换方法.

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接三角形 ABC 的坐标分别为：$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，作压缩变换 $x'=\frac{x}{a}$，$y'=\frac{y}{b}$，则原方程可化为 $x'^2+y'^2=1$，$A'\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}\right)=(x'_1, y'_1)$，$B'\left(\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}\right)=(x'_2, y'_2)$，$C'\left(\frac{x_3}{a}, \frac{y_3}{b}\right)=(x'_3, y'_3)$.

$$S'_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x'_1 & y'_1 & 1\\ x'_2 & y'_2 & 1\\ x'_3 & y'_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & 1\\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & 1\\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2ab}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{ab}\times\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{ab}S_{\triangle ABC},$$

即 $S_{\triangle ABC}=abS'_{\triangle A'B'C'}$.

$S'_{\triangle A'B'C'}$ 是圆内接三角形，而圆内接三角形是以正三角形的面积为最大，即

$$(S'_{\triangle A'B'C'})_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

所以 $(S_{\triangle ABC})_{\max}=ab(S'_{\triangle A'B'C'})_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

读者可以尝试作这样的问题：设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积为 πab，证明其内接四边形面积的最大值为 $2ab$.

4.2.4 数学抽象

例 30 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ 有多少组非负整数解.

分析与解：原像：方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=7$；像：7 个不可辨别的球，4 个不同的盒子；

映射：一组解对应一种方法反演：把 7 个球放进 4 个不同的盒子方法数.

显然有 $C_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{3!}=120$(种) 不同的方法，所以该方程有 120 组非负整

数解.

例 31 n 个点 V_1, V_2, …, V_n 按顺序排列在同一条直线上,每个点涂上红色或蓝色. 如果相邻点间的线段 V_iV_{i+1} 的两端颜色不同,我们把它称为标准线段. 已知 V_1 与 V_n 的颜色不同,证明标准线段的个数一定是奇数.

分析与解: 从关系——映射——反演考虑,原像:涂成红色或蓝色的点 V_1, V_2, …, V_n;映射:f;像:$a_i = f(V_i) = \begin{cases} 1, 当 V_i 为红色, \\ -1, 当 V_i 为蓝色. \end{cases}$

据题意 $-1 = a_1a_n = a_1a_2^2a_3^2\cdots a_{n-1}^2a_n = (a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-2}a_{n-1})(a_{n-1}a_n)$, a_ia_{i+1} 反映了每条线段的赋值. 如果其中标准线段的条数为 k ($k \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$), 则 $-1 = (-1)^k$, 故 k 为奇数.

反演:标准线段的个数为奇数.

例 32 (翻杯子问题)桌上有 9 只茶杯,杯口向上,请你每次"翻转"其中任意 6 只杯子,使其杯口向下,问能不能经过这样有限次的"翻转"后,使 9 只杯子全部口向下? 如果能,请说出你的思考过程;如不能,请说明理由.

分析与解: 方法一:从结果来说不能. 这题可以从数的奇偶性和两个数的最小公倍数进行分析:(1)要使 9 个杯子口全部向下,最少每只杯子"翻转"1 次,共 9 次,或者每个杯子"翻转"3 次, 5 次,…,能使 9 个杯子口向下,而 9 的奇数倍永远是奇数;但每次"翻转"6 只,不管"翻转"多少次,总是偶数, 6 的任何倍数都是偶数,永远不会出现奇数,即奇数不会等于偶数,所以,按照题中要求,是不可能使 9 个杯子口全部向下的. (2)从两个数的最小公倍数考虑:6 和 9 的公倍数是 18 的倍数,也就是说, 6 个 6 个地翻,每只杯子翻 3 次,"翻转"总次数 18 次;9 个 9 个地翻,每只杯子翻 2 次,"翻转"总数也是 18 次,两种翻法翻的结果相同,但杯口向上,不可能出现杯口向下.

方法二:设朝上为 1,朝下为-1.

初始的数值:因为 9 个杯口都朝上,则 $1+1+\cdots+1=9$.

目标函数:9 个杯口都朝下,则 $-1-1-\cdots-1=-9$.

每次翻六个 $\sum_{i=1}^{6} x_i = 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6$ (i 表示第 i 个杯子, $x_i \in \{-1, 1\}$), 9 与集合$\{6, 4, 2, 0, -2, -4, -6\}$中的任意一个数运算都不会为 0,即 $9 + nt \neq 0$ (其中 $t \in \{6, 4, 2, 0, -2, -4, -6\}$, n 为次数,显然为自然数)

变换一下上面的问题:

(1) 若换成 9 个杯子,每次翻转 5 个,若干次后能不能使 9 只杯子全部口向下?

(2) 若换成 10 个杯子,每次翻转 6 个,若干次后能不能使 10 只杯子全部口向下?

(3) 若换成 10 个杯子，每次翻转 3 个，若干次后能不能使 10 只杯子全部口向下？

分析与解：(1) 问题要使 9 个杯子口全部向下，最少每只杯子“翻转”1 次，共 9 次，或者每个杯子“翻转”3 次，5 次，……能使 9 个杯子口向下，而 9 的奇数倍永远是奇数，且目标为 −9；每次“翻转”5 个，不管“翻转”多少次，总是奇数，5 的奇数倍是奇数，可以出现奇数. 成功，具体操作为：

AAAAAAAAA

BBBBBAAAA(1 次)

BBAAABBAA(2 次)，即 *BBBBAAAAA*

BBBBBBBBB(3 次).

(2) 要使 10 个杯子口全部向下，最少每只杯子“翻转”1 次，共 10 次，或者每个杯子“翻转”3 次，5 次……能使 10 个杯子口向下，10 的奇数倍是偶数，且目标为 −10. 每次翻 6 个是偶数，6 的任何倍数都是偶数，所以可以成功. 具体操作为：

AAAAAAAAAA

BBBBBBAAAA(1 次)

BBBBAABBBB(2 次)，即 *BBBBBBBBAA*

BBBAAAAABA(3 次)，即 *BBBBAAAAAA*

BBBBBBBBBB(4 次).

(3) 要使 10 个杯子口全部向下，最少每只杯子“翻转”1 次，共 10 次，或者每个杯子“翻转”3 次，5 次，……能使 10 个杯子口向下，10 的奇数倍是偶数，且目标为 −10. 每次翻 3 个是奇数，3 的偶数倍是偶数，所以可以成功. 具体操作为：

AAAAAAAAAA

BBBAAAAAAA(1 次)

BBBBBBAAAA(2 次)

BBBBBABBAA，即 *BBBBBBBAAA*(3 次)

BBBBBBBBBB(4 次)

这其中一般的规律是：有 A 只杯子，全部口向上，每一次翻动 B 只杯子，当 A 为偶数，B 为偶数时，则 N 次后可以使杯口全部朝下；当 A 为偶数，B 为奇数时，则 N 次后可以使杯口全部朝下；当 A 为奇数，B 为偶数时，则不可以使全部杯口朝下；当 A 为奇数，B 为奇数时，则 N 次后可以使全部杯口朝下. 总而言之，当 $BN-A=$ 偶数成立时，有解，最小解可求；反之无解.

分析与证明：设杯口朝上为 1，杯口朝下为 −1. 翻转一次记为 −1（因为无论从 1 变为 −1，还是 −1 变为 1，由于 $(-1)\times 1=-1$，$1\times(-1)=1$）.

情形1:偶数个杯子,奇数次翻

若要杯口朝下,则目标函数值是:$(-1)^{2n}=1$;翻奇数次,由于每翻一次为-1,故$(-1)^{2k+1}=-1$,但偶数次操作后,$(-1)^{2k+1}=-1$可以变为1,因此可以达到目标函数值1.

情形2:偶数个杯子,偶数次翻

若要杯口朝下,则目标函数值是:$(-1)^{2n}=1$;翻偶数次,由于每翻一次为-1,故$(-1)^{2k}=1$,因此可以达到目标函数值1.

情形3:奇数个杯子,奇数次翻

若要杯口朝下,则目标函数值是:$(-1)^{2n+1}=-1$;翻奇数次,由于每翻一次为-1,故$(-1)^{2k+1}=-1$,因翻奇数次可以达到目标函数值-1.

情形4:奇数个杯子,偶数次翻.

若要杯口朝下,则目标函数值是:$(-1)^{2n+1}=-1$;翻偶数次,由于每翻一次为-1,故$(-1)^{2k}=1$,翻奇数次后仍为偶数,理由$((-1)^{2n})^{2k+1}=1$;偶数次后当然也是1,理由$((-1)^{2n})^{2k}=1$. 所以任何时候都不能达到目标函数值-1.

4.2.5 母函数法

母函数方法(生成函数方法),是组合论中求解计数问题的重要工具之一,尤其是涉及求解某些排列组合递推关系等问题时,更具突出的优越性.母函数方法的基本思想是把离散数列同形式幂级数对应起来,把数列间的关系转化成幂级数的运算关系,达到由幂级数形式来确定离散数列构造的目的.

定义3.8 设$\{a_k\}$, $k=0, 1, 2, \cdots, n$是一个给定的数列,如果它恰好是某一个多项式$f(x)$的系数,即$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,就称$f(x)$是这个数列的母函数或生成函数,意思是这个数列是由多项式$f(x)$产生的.

例33 假如由一对成年兔子,放于围栏中,每个月可以生下一对小兔,而小兔在出生第二个月便可以生一对小兔,问这样一年后围栏中共可多出多少对兔子?(这里假定每产一对兔子必须是一雌一雄且没有死亡)

分析与解:对于$n=1, 2, \cdots$,令F_n表示第n个月开始时兔子的对数.显然有$F_1=1$, $F_2=2$.在第n个月的开始,那些第$n-1$个月已经在围栏中的兔子仍然存在,而且每对在第$n-2$个月初就存在的兔子将在第$n-1$个月生出一对小兔,所以有

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 3,\ n\in\mathbf{N}),\\ F_1=1,\ F_2=2.\end{cases}$$

这就是一个带有初值的递推关系,如果规定$F_0=1$,则上述关系为

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N}), \\ F_0 = 1,\ F_1 = 1, \end{cases} \tag{①}$$

满足①式的数列称为斐波那契数列. 由递推关系①可以推出斐波那契数列是 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 56, …. 从①就可以知道一年后兔子的总数,若问你五年后兔子的总数呢? 如仍用①递推就显得很麻烦. 这时我们可以利用母函数法.

由定义知斐波那契数列 F_0, F_1, F_2, …, F_n 的母函数为 $F(x)$,即

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + \cdots,$$

$$-xf(x) = -F_0 x - F_1 x^2 - \cdots - F_{n-1} x^n - \cdots,$$

$$-x^2 f(x) = -F_0 x^2 - \cdots - F_{n-2} x^n + \cdots,$$

把三式相加,得

$(1 - x - x^2) f(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + \cdots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \cdots$.

所以 $(1 - x - x^2) f(x) = 1$,

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k x^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k x^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} x^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] x^k,$$

故 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$.

本章思考题

1. 请从映射的视角解释运算.
2. 从 1 到 $2n$ 的正整数中任取 $n+1$ 个数,则这 $n+1$ 个数中至少有一个数是另一

个数的倍数.

3. 某考生备考时间37天,据他过去的经验最多需复习60个小时,但每天至少需1小时.求证:无论怎样安排,他必须在连续的若干天里恰好复习13小时.
4. 空中有17个点,用三种颜色连结,试证:不管怎么涂,总存在一个同色三角形.
5. 举例说明利用“关系——映射——反演”思想对分析问题从而建立数学模型的益处.
6. 谈谈你对抽屉原理教或学的认识、心得或经验.

本章参考文献

[1] 张奠宙,邹一心.现代数学与中学数学[M].上海教育出版社,1990.
[2] 徐利治.数学方法论选讲(第三版)[M].华中科技大学出版社,2000.

第四章　数论初步

随着计算机科学的发展，离散数学越来越受到关注，而离散数学中数论占了较大的比例，数论特别是初等数论由于与中小学数学内容联系紧密，又与一些智力竞赛问题相关，所以很受大家关注，下面我们先介绍一些数论的基本概念，重点介绍连接初等数学与大学数学纽带的重要知识之一——同余.

§1　整除与素数

1.1　整除

我们知道整数集 $\mathbf{Z}$ 对除法运算不一定封闭，即任意 $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$，则 $\frac{a}{b}$ 的结果不一定是整数，一般情况下 $a = bq + r\ (0 \leqslant r < |b|)$，其中 q、r 为整数，由此我们得到下面的定理：

定理 4.1（带余除法）　设 $a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0$，那么存在唯一的一对整数 q 与 r，使得

$$a = bq + r\ (0 \leqslant r < |b|). \quad ①$$

证明：唯一性：若还有整数 q，q' 与 r' 满足

$$a = q'b + r',\ 0 \leqslant r' < |b|, \quad ②$$

不妨设 $r' \geqslant r$. 由①和②得：$0 \leqslant r' - r < |b|$，及 $r' - r = (q - q')b$,

若 $r - r' > 0$，则可得到 $|b| \leqslant r' - r$，这与 $0 \leqslant r' - r < |b|$ 矛盾. 所以必有 $r' = r$，从而 $q = q'$.

存在性：当 $b|a$ 时，可取 $q = \frac{a}{b}$，$r = 0$. 当 $b \nmid a$ 时，考虑集合

$$T = \{a - kb \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\},$$

则集合 T 中必有正整数(例如,取 $k = -2|a||b|$). 所以由最小数原理知 T 中必有一个最小正整数,设为 $t_0 = a - k_0 b > 0$, 则必有 $t_0 < |b|$(因 $b \nmid a$,所以 $t_0 \neq |b|$, 若 $t_0 > |b|$, 则 $t_1 = t_0 - |b| > 0$, 显然 $t_1 \in T$, $t_1 < t_0$, 这与 t_0 的最小性矛盾, 所以取 $q = k_0$, $r = t_0$ 就满足要求了.

定义 4.1 设 $a, b \in \mathbf{Z}$, 如果存在 $q \in \mathbf{Z}$, 使得 $a = bq$ ($b \neq 0$), 那么就说 a 可以被 b 整除, 记作 $b|a$,且称 a 是 b 的倍数, b 是 a 的约数.

设 $a, b, c, d, r, m, k, l \in \mathbf{Z}$, 由定义及乘法运算的性质,立即可推出整除关系有下面性质

(1) $b \mid a \Rightarrow r = 0$;

(2) $\begin{cases} b \mid a, \\ a \mid b, \end{cases} \Rightarrow a = b$;

(3) $c \mid b, b \mid a \Rightarrow c \mid a$;

(4) $\begin{cases} m \mid a, \\ m \mid b, \end{cases} \Rightarrow m \mid (ka + lb)$;

上式可以推广到有限个.

(5) $d \mid a, d \mid b \Rightarrow d \mid (a, b)$;

(注意:其中符号(a, b)表示 a, b 的最大公约数,以下同)

(6) $\begin{cases} (a, b) = 1, \\ a \mid bc, \end{cases} \Rightarrow a \mid c$;

(7) $\begin{cases} (a, b) = 1, \\ a \mid c, \\ b \mid c, \end{cases} \Rightarrow ab \mid c$;

(8) F_1, F_2, $\cdots$, F_n 两两互素,则这 n 个数互素. 注意,反之不一定.

定理 4.2 在 m ($m \geqslant 2$) 个相邻整数中有且只有一个数能被 m 整除.

1.2 素数

定义 4.2 如果大于 1 的整数 p 恰有两个正因数 1 与 p,就说 p 是素数;如果正整数 n 有多于两个的正因数,就说 n 是合数.

根据素数的性质以及整除的定义,马上可以得到:设 p 为素数,则要么 $p|a$,要么 $(p, a) = 1$ 的结论.

正整数集合可以按素数、合数、1 来分类,即被分成三类:{1},素数类和合数类. 素数是一个非常重要的概念,它在数论中具有相当重要的作用,因此它的性质与定理受到数学家的极大关注,下面我们收集了有关素数的一些重要定理,有的给

出证明，有的因篇幅关系略去，感兴趣的读者可参考潘承洞、潘承彪两位教授所著的《初等数论》.

定理 4.3　大于 1 的整数 n 的大于 1 的最小因数是素数，即大于 1 的整数至少有一个素因数.

定理 4.4　素数有无限多个.

证明：若素数只有有限个，设它们为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，令 $a = p_1p_2\cdots p_n+1$，显然 a 是大于 1 的整数，根据定理 4.3，a 有素因数，不妨设它为 p，问题在于证明 p 不能是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中的任何一个. 事实上，若 $p = p_k(1 \leqslant k \leqslant n)$，则 $p \mid p_1p_2\cdots p_n$，又因为 $p \mid a$（理由：a 有素因数 p），所以 $p \mid 1$，这与 p 是素数矛盾. 所以，素数有无限多个.

定理 4.5　若 n 是合数，则 n 有平方不大于 n 的素因数（每个合数 n 至少有一个素因数 $p \leqslant \sqrt{n}$）.

证明：设 $n = ab$，$1 < a \leqslant b$，这就有 $a^2 \leqslant ab = n$. 若 a 是素数，结论已成立；若 a 是合数，则 a 必有素因数，设为 p，于是 $p^2 < a^2 \leqslant n$.

定理 4.6　若 p 是素数，$a_i \in \mathbf{Z}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$p \mid a_1a_2\cdots a_n$，则 p 整除某一个 a_i.

证明：反证若 p 不整除 a_1，p 不整除 a_2，…，p 不整除 a_n，则 $(p, a_i) = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$，所以 $(p, a_1a_2\cdots a_n) = 1$，这与 $p \mid a_1a_2\cdots a_n$ 矛盾，所以，p 整除某一个 a_i.

定理 4.7　每个大于 1 的整数，都可以唯一地分解成素因数的乘积（不计因素的顺序）.

推论　大于 1 的整数可以唯一地分解成 $a = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$.（其中 p_1，p_2，…，p_k 是相异素数，$a_i \in \mathbf{N}$，$i = 1, 2, \cdots, k$）

因为素数有很特别的性质，为此如何寻找素数就成了当时众多数学家的工作，其中最有代表的是费马（Fermat，1601—1665）、梅森（M. Mersenne，1588—1648）、欧几里得（Euclid of Alexandria，约公元前 330—公元前 275）等，他们研究的成果有：

费马数：形如 $F_n = 2^{2^n}+1$ 的数称为费马数. 当它为素数时称为费马素数. 已经知道当 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 时，费马数都是素数，但当 $n = 5$ 时为合数. 到 1988 年时，数学家已经知道 $n = 6, 7, \cdots, 21$ 都是合数. 德国一位业余数学爱好者用计算机经过 50 天的运算，在 2005 年 2 月 18 日发现迄今为止最大的素数 $2^{25\,964\,951}-1$.

梅森数：形如 $M_n = 2^n - 1\ (n > 1)$ 的数称为梅森数，其中是素数的梅森数称为梅森素数，当 $n = 2, 3, 5, 7$ 时上述均为梅森素数.

关于梅森数的定理：

定理 4.8 若 $n>1$，且 a^n-1 是素数，则 $a=2$，且 n 是素数.

该定理给出了 a^n-1 是素数的必要条件. 这个条件非充分，即 M_n 是素数时，n 必是素数，但反过来并不成立：当 n 是素数时，M_n 不一定是素数.

迄今为止，我们只知道 34 个梅森数是素数，它们是 M_p，其中

$p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11\,231, 19\,937, 21\,701, 23\,209, 44\,497, 86\,243, 110\,503, 132\,049, 216\,091, 756\,839, 858\,433, 1\,257\,787.$

欧几里得数：把形如 $P^{\#}+1$ 的数称为欧几里得数(其中 p 为素数，$P^{\#}$ 表示所有小于等于 p 的素数的乘积).

以下列举的欧几里得数是素数：

如
$$2^{\#}+1=2+1=3,$$
$$3^{\#}+1=2\times3+1=7,$$
$$5^{\#}+1=2\times3\times5+1=31,$$
$$7^{\#}+1=2\times3\times5\times7+1=211,$$
$$11^{\#}+1=2\times3\times5\times7\times11+1=2311.$$

但下面不是素数

$$13^{\#}+1=2\times3\times5\times7\times11\times13+1=30\,031=59\times509,$$
$$17^{\#}+1=2\times3\times5\times7\times11\times13\times17+1=510\,511=19\times97\times277,$$
$$19^{\#}+1=2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19+1=9\,699\,691=347\times27\,953.$$

定理 4.9 若 m 的标准分解式为 $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$，则 m 的一切正因数的个数为

$$\tau(m)=\prod_{i=1}^{n}(a_i+1).$$

定理 4.10 相邻质数的距离(1 个距离指相邻两个自然数的间隔，例如 3 与 5 距离为 2)要多大有多大.

通过上面的整理可以发现虽然众多数学家为寻找素数的规律花费了很多心血，但总是没有得到理想的结论，也就是说自然数列中素数的分布是漫无规则的，至今谁也找不到表示素数的一般公式. 值得注意的是，在自然数列中，素数确实是微乎其微. 与素数有关的一个著名猜想——**哥德巴赫(Goldbach)猜想**：

每个大于 4 的偶数(每个不小于 6 的偶数)，都是二个奇素数之和；

每个大于 7 的奇数(每个不小于 9 的奇数)，都是三个奇素数之和.

一个很有趣的结论：任何大于3的素数都可以表示成 $6n+1$ 或 $6n-1$ 形式的数，反之能表示成 $6n+1$ 或 $6n-1$ 形式的数，不一定都是素数.

§2 同　余

11，111，1111，…中是否存在平方数？已知 $N=13xy45z$，能被792整除，试求 x，y，z. 面对这样的问题，我们该如何下手呢？通过本章的学习，相信你一定能找到答案.

整数可以分成奇数与偶数两部分，奇数可以表达为 $2k+1\ (k\in\mathbf{Z})$ 的形式，而偶数可以表达为 $2k\ (k\in\mathbf{Z})$ 的形式. 也就是说，如果以2为基准，可以把整数分成两大类，一部分中的所有整数被2除，所得的余数为1；另一部分的所有整数被2除，所得的余数为0. 实际上就是给出了一种等价关系，它把整数分成了两大等价类. 在我们的生活中，可以见到许多类似的现象. 如何认识一般情况中的数量关系与规律呢？这就是本章所要叙述的主要内容.

我国古代的《孙子算经》中提到韩信点兵的算题："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"

这是一个关于求解一般同余式组 $x\equiv a \pmod 3\equiv b \pmod 5\equiv c \pmod 7$ 的问题，可以发现她的解为 $x\equiv 70a+21b+15c \pmod{105}$. 这个解法，在我国明朝程大位《算法统宗》(1593年)里有一首歌：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正月半，除百零五便得知.

(译：3个人共同走路，其中有70岁以上的老年人的可能性很少；5棵梅花树总共21支，7个孩子当正月15日时在家中团圆，把105的某个倍数减去，就得到答案.)

但对于70，21，15是怎么来的，却没有明确的解说. 公元1247年，南宋数学家秦九韶在《数书九章》中创造了一种著名的方法"大衍求一术"，使孙子问题有了一个一般的解法. 在西方，欧拉、拉格朗日、高斯等对此问题都作过系统研究，高斯在《算术探究》中也明确地得出了这个问题的解法，并命名为"高斯定理". 但这已经在秦九韶之后500多年了，如果与《孙子算经》比，则要晚1500多年！公元1852年，英国基督教士伟烈亚力将"物不知数"题介绍到西方，人们发现它符合高斯定理，俗称"中国剩余定理"，该定理至今仍闻名海外. (参阅周春荔《数论初步》)

同余概念在初等数论有着重要的作用，国外有的教科书中以"时钟数学"的形式出现. 事实上，在现实生活中，我们关心的往往不是某些整数本身，而是这些数用某一固定的数去除所得的余数. 例如：火车晚上6点钟开，经过14小时就能到达北京，问究竟几点到北京？答案不是 $18+14=32$ 点到达，而是明天清晨8点到

达. 这是因为 $32 = 1\times 24 + 8$. 这里,我们关心的不是 32 被 24 所除而得的商数 1,而是关心被 24 除所得的余数 8. 对 24 而言,32 和 8 的余数是相同的,这是一个最简单的同余问题. 生活中此类周而复始的问题比比皆是,例如一周有 7 天,年龄的属相有 12 个,等等.

2.1 同余的概念与性质

定义 4.3 设 $m \neq 0$, 若 $m \mid (a-b)$, 即 $a-b=mk$, 则称 m 为模, a 同余于 b 模 m, 记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

注: a 同余于 b 模 m 的充要条件是 a 和 b 被 m 除后所得的最小非负余数相等,即若

$$a = q_1 m + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < m,$$

$$b = q_2 m + r_2,\ 0 \leqslant r_2 < m,$$

则 $r_1 = r_2$.

利用同余的定义和整除的有关性质,我们可以得到同余的一系列性质:

等价性质:根据等价关系的三个特征——自反性、对称性、传递性,易证同余具有这些性质,从而得到证明同余是一种等价关系,利用等价关系可以对某个集合分类.

运算性质:

(1) 如果 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, $c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)$, 那么他们的加、减、乘积和乘方也是同余的,即

$$a+c\equiv b+d(\mathrm{mod}\ m),$$

$$a-c\equiv b-d(\mathrm{mod}\ m),$$

$$ad\equiv bd(\mathrm{mod}\ m).$$

利用定义易证,并可推广到 $n>2$.

(2) $ca\equiv cb(\mathrm{mod}\ m)$, $(c,\ m)=d$, 则 $a\equiv b\left(\mathrm{mod}\ \dfrac{m}{d}\right)$.

(3) $ca\equiv cb(\mathrm{mod}\ m)$, $(c,\ m)=1$, 则 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

(4) 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, $d\mid m$, 则 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ d)$.

(5) 若 $m\geqslant 1$, $(a,\ m)=1$, 则存在 c, 使得 $ca\equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$.

(6) $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, $c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)$, 则 $ax+yc\equiv bx+dy(\mathrm{mod}\ m)$ $(x,\ y\in \mathbf{Z})$.

以上所列出的每一个性质都很简单,但都非常重要. 下面举例说明如何应用同余的概念和基本性质简捷地处理某些整除问题.

2.2 应用一

例1 今天是星期四,问 10^{1000} 天后是星期几?

解:因为 $10 \equiv 3 \pmod 7$,所以 $10^3 \equiv 3^3 \pmod 7$,又 $27 \equiv -1 \pmod 7$,即 $10^3 \equiv -1 \pmod 7$,所以 $(10^3)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 7$,即 $10^6 \equiv 1 \pmod 7$.

所以 $10^{1000} \equiv 10^{6\times 166+4} \equiv (10^6)^{166} \times 10^4 \equiv 1^{166} \times 10^4 \equiv 3^4 \equiv 4 \pmod 7$.

所以 10^{1000} 天后是星期一.

在同余的基本问题中,先求出与±1同余的数是一种常用的技巧.

例2 求33除 2^{2003} 的余数.

解:因为 $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{33}$,$(2^5)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{33}$,

所以 $2^{2003} \equiv (2^{10})^{200} \times 2^3 \equiv 1^{200} \times 2^3 \equiv 8 \pmod{33}$.

例3 求8除 $7^{2n+1}-1$ 的余数.

解:因为 $7 \equiv -1 \pmod 8$,则 $7^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \equiv -1 \pmod 8$,所以 $7^{2n+1} - 1 \equiv -2 \equiv 6 \pmod 8$.

例4 求 2003^{2002} 的个位数?

解:因为 $2003 \equiv 3 \pmod{10}$,$3^2 = 9 \equiv -1 \pmod{10}$,$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$,所以 $2003^{2002} \equiv 2003^{4\times 500+2} \equiv 1 \times 2003^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{10}$.

例5 设 N 是正整数,M 是 N 的各个数位上的数码和,求证:$N \equiv M \pmod 9$.

证明:设 $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$

$$= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0,$$

$M = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$,

$N - M = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1(10 - 1) \equiv 0 \pmod 9$,

即 $N \equiv M \pmod 9$.

这是十进制数的一个特有的性质,人们常常用此法检验正整数算术运算结果的正确性,称为弃9法.例如,$845 \times 372 = 315\,340$,以()表示正整数的数码和.验算:因为 $845 \times 372 \equiv (17) \times (12) \equiv 8 \times 3 \equiv 6 \pmod 9$,另一方面,$315\,340 \equiv (16) \equiv 7 \pmod 9$,故运算有错误.正解 $845 \times 372 = 314\,340$.

有了以上这些准备工作,现在就可以来回答本节一开始提出的两个问题,首先回答第一个问题:

分析:当需要用穷举法解决问题时,对象只能是有穷个;如果对象为无穷个,而对模数 p 同余的数又具有相同性质,则可把对象分别按余数是 0, 1, …, $(p-1)$ 分成 p 类,再进行穷举,便可使问题大大简化.对于有些问题,如十进制的数字和的性质,对模数 p(如 $p = 9$) 同余的数保持不变,用同余解题是很自然的,特别

在同余中很重要的是 $p=2$ 的情形，按模 2 划分同余类，实际上就是通常的奇、偶数，奇偶性分析有着十分广泛的用途.

正整数可以分为偶数与奇数，而偶数的平方是 4 的倍数，即 $(2n)^2\equiv 0 \pmod 4$. 奇数的平方 $(2n+1)^2=4n^2+4n+1\equiv 1 \pmod 4$. 因此平方数关于模 4 同余 0 或 1，即关于模 4 同余 2 或 3 的数一定不是平方数.

$$11\equiv 3 \pmod 4,$$
$$111=100+11\equiv 11\equiv 3 \pmod 4,$$
$$\cdots$$
$$11\cdots 11\equiv 11\equiv 3 \pmod 4,$$

因此 11，111，…都不是平方数.

其次回答第二个问题：已知 $N=\overline{13xy45z}$，能被 792 整除，求 x、y 和 z.

分析：因为 N 能被 792 整除，而 $792=8\times 9\times 11$，因此 $8\mid N$，而能被 8 整除的数只要后三位数能被 8 整除即可，即 $8\mid \overline{45z}$，故 $z=6$. 又因为 $9\mid N$，由例 5 知只要数码和能被 9 整除即可，$9\mid(19+x+y)$，故 $x+y=8$ 或 $x+y=17$；又因为 $11\mid N$，我们知道一个整数能被 11 整除的充要条件是它的奇数位上的数码和与偶数位上的数码和之差能被 11 整除，所以得到 $11\mid(3+x-y)$，故 $x-y=8$ 或 $x-y=-3$，这样，可得 x、y 的四组方程组：

$$\begin{cases}x+y=8,\\x-y=8\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y=8,\\x-y=-3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y=17,\\x-y=8\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y=17,\\x-y=-3,\end{cases}$$

符合题意的解为：$\begin{cases}x=8,\\y=0,\end{cases}$ 即该数 $N=1\,380\,456$.

例 6 证明方程 $x^4+y^4+2=5z$ 无整数解.

分析：若有整数解，则 x^4+y^4+2 应是 5 的倍数，故只需看 x^4+y^4+2 是否能被 5 整除，即证明 $x^4+y^4+2\equiv 0 \pmod 5$.

证明：对整数集合 $\mathbf{Z}$ 的任意 x 来说，$x\equiv 0,1,2,3,4 \pmod 5$，那么

$$x^2\equiv 0,1,4,9,16 \pmod 5\equiv 0,1,4 \pmod 5,$$
$$x^4\equiv 0,1,16 \pmod 5\equiv 0,1 \pmod 5.$$

对整数集合 $\mathbf{Z}$ 内的任意 y 来说，和 x 有同样的结果，所以

$$x^4+y^4\equiv 0,1,2 \pmod 5,\ x^4+y^4+2\equiv 2,3,4 \pmod 5,$$

我们知道若 x^4+y^4+2 能被 5 整除，则 $x^4+y^4+2\equiv 0 \pmod 5$. 现在为 2，3，4，所以 $x^4+y^4+2=5z$ 无整数解.

例 7 2008^{2008} 的个位数字是多少?

解：因为 $2008 \equiv 8 \pmod{10}$，而

$$8 = 8 \pmod{10},$$
$$8^2 = 64 \equiv 4 \pmod{10},$$
$$8^3 = 512 \equiv 2 \pmod{10},$$
$$8^4 = (8^2)^2 \equiv 6 \pmod{10},$$
$$8^5 = 8^2 \times 8^3 \equiv 8 \pmod{10},$$
$$8^6 = (8^3)^2 \equiv 4 \pmod{10},$$
$$8^7 = 8^4 \times 8^3 \equiv 2 \pmod{10},$$
$$8^8 = (8^4)^2 \equiv 6 \pmod{10},$$
$$\cdots$$

由此可知，8^n 的个位数字是 8，4，2，6，周期为 4 循环出现.

$2008 \div 4 = 502$，正好除尽，所以 2008^{2008} 的个位数字为 6.

例 8　证明每一个整数 x 至少满足下列同余式中的一个：

$$x \equiv 0 \pmod 2,\ x \equiv 0 \pmod 3,\ x \equiv 1 \pmod 4,$$
$$x \equiv 5 \pmod 6,\ x \equiv 7 \pmod{12}.$$

证明：思想方法，每个整数分成偶数与奇数考虑.

(1) 偶数的情况：因为偶数能被 2 整除，所以全体偶数满足同余方程 $x \equiv 0 \pmod 2$.

(2) 剩下只需考虑全部奇数是否满足其余的 4 个同余式即可，因为其余的同余式的模分别为 3，4，6，12，它们的最小公倍数为 12，可按模 12 将全体整数分为被 12 除后余数分别为 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11 十二类，而其中奇数分为 1，3，5，7，9，11 六类：

$$[1] = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 12q + 1\},$$
$$[3] = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 12q + 3\},$$
$$[5] = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 12q + 5\},$$
$$[7] = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 12q + 7\},$$
$$[9] = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 12q + 9\},$$
$$[11] = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 12q + 11\}.$$

下面先看被 12 除后余数为 1 的类即[1].

(1) $x \equiv 1 \pmod 4$ 即 $4 \mid (x-1)$，若 $x = 12q + 1$，则 $12q + 1 - 1 = 12q$，显然

$4|12q$，所以这一类奇数满足 $x \equiv 1 \pmod 4$，同理，$12q+5$ 这类奇数也满足.

(2) $x \equiv 0 \pmod 3$ 即 $3|x$，若 $x = 12q+3$，显然 $3 \mid 12q+3$，$12q+3$ 这一类奇数满足即 $x \equiv 0 \pmod 3$. 同理，$12q+9$ 这类奇数也满足.

(3) $x \equiv 5 \pmod 6$ 即 $6|x-5$，若 $x = 12q+11$，则 $x-5 = 12q+11-5 = 12q+6$，显然 $6 \mid 12q+6$，$12q+11$ 这一类奇数满足即 $x \equiv 5 \pmod 6$.

(4) $x \equiv 7 \pmod{12}$ 即 $12 \mid (x-7)$，若 $x = 12q+7$，则 $x-7 = 12q+7-7 = 12q$，显然 $12|12q$，故 $12q+7$ 这类奇数满足即 $x \equiv 7 \pmod{12}$.

综上所述，全体奇数分别进入四个类中.

例 9　证明三个连续整数的偶次方之和，不可能是一个整数的偶次方.

证明：设三个连续的整数为 $k-1$，k，$k+1$，他们的偶次方之和为 $(k-1)^a + k^b + (k+1)^c$，其中 a，b，c 为已知的偶数. 由于没有说平方，而是偶次方，没有具体的方次很难计算，但又想知道这类偶次方的粗略计算，用同余方法就可以达到这样的目的.

整数以 3 为模分类可以分成三类：$[0] = \{3k\}$，$[1] = \{3k+1\}$，$[2] = \{3k+2\}$，在这样分类的情况下连续的三个整数可以写成 $3k$、$3k+1$，$3k+2$.

因为 $3k \equiv 0 \pmod 3$，则 $(3k)^a \equiv 0 \pmod 3$（a 为偶数）. 同理 $3k+1 \equiv 1 \pmod 3$，则 $(3k+1)^b \equiv 1^b \equiv 1 \pmod 3$（$b$ 为偶数），$3k+2 \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$，则 $(3k+2)^c \equiv (-1)^c \equiv 1 \pmod 3$（$c$ 为偶数），它们的偶次方之和为 $(3k)^a + (3k+1)^b + (3k+2)^c \equiv 2 \pmod 3$，即三个连续的偶次方之和被 3 除后余 2；另外任何一个整数以模 3 分类 $3k$、$3k+1$ 或 $3k+2$ 三者必具其一，但他们偶次方后从上面可知不是 0 就是 1，不可能是 2，因此命题得证.

例 10　设 p 为素数，且 $p > 3$，则对任意的整数 a，b，有 $ab^p - ba^p \equiv 0 \pmod{6p}$.

分析：由指数、素数想到费马同余公式（$b^p \equiv b \pmod p$）.

证明：由费马公式得到 $b^p \equiv b \pmod p$，即 $p|(b^p - b)$. 又因为 $6 \mid (b^p - b)$，$(6, p) = 1$，所以 $6p|(b^p - b)$，即 $b^p - b \equiv 0 \pmod{6p}$，显然

$$a(b^p - b) \equiv 0 \pmod{6p}. \qquad ①$$

（证明 6 整除 $(b^p - b)$：因为 $b^p - b = b(b^{p-1} - 1) = b((b^2)^{\frac{p-1}{2}} - 1) = b(b^2 - 1)[(b^2)^{\frac{p-1}{2}-1} + \cdots + 1] = b(b+1)(b-1)[\cdots]$，根据三个连续自然数之积能被 6 整除，所以 $6|(b^p - b)$.）

同理有 $a^p \equiv a \pmod p$，即 $p|(a^p - a)$；又因为 $6 \mid (a^p - a)$，$(6, p) = 1$，所以 $6p|(a^p - a)$，即 $a^p - a \equiv 0 \pmod{6p}$，显然

$$b(a^p - a) \equiv 0 \pmod{6p}. \qquad ②$$

①－②得

$$ab^p-ba^p\equiv 0(\bmod 6p).$$

例 11 把 4444^{4444} 写成十进制数时，它的数码和是 A，A 的数码和是 B，求 B 的数码和.

解：设 $N=4444^{4444}$，则

$$4444^{4444}<(10^5)^{4444}=10^{22\,220},$$

即 $N<10^{22\,220}$，故 N 的数码不超过 22 220 个.

又因为每个数码 $\leqslant 9$，$A<22\,220\times 9=199\,980$，则 A 的数码和 $<9\times 6=54$.

据条件 $B=A$ 的数码和，而 A 的数码和小于 54，即 $B<54$. 在小于 54 的正整数中，数码和最大的数是 49，它的数码和是 13.

因为在十进制数中，任一个正整数对模 9 与其数码和同余，不妨令 B 的数码和为 C，则 $N\equiv A\equiv B\equiv C(\bmod 9)$，

$$4444=9\times 493+7,$$

$$4444\equiv 7(\bmod 9),$$

$$7^3\equiv 1(\bmod 9)\text{（关键）},$$

$$4444=3\times 1481+1,$$

$$4444^{4444}\equiv 7^{4444}\equiv (7^3)^{1481}\times 7\equiv 1\times 7(\bmod 9),$$

故 $C\equiv 7(\bmod 9)$，又因为 $C<13$，$C=7$ 是 B 的数码和.

例 12 设 $f(x)$ 是关于 x 的整式，当 $f(x)$ 被 $x-1$ 除时余 2，被 $x-3$ 除时余 4，求 $f(x)$ 被 $(x-1)(x-3)$ 除时所得的余.

解：因为 $f(x)=q_1(x)(x-1)+2$，$f(x)=q_2(x)(x-3)+4$，即 $f(1)=2$，$f(3)=4$.

设 $f(x)=q_3(x)(x-1)(x-3)+r(x)$，则 $r(x)=ax+b$，从而

$$f(x)=q_3(x)(x-1)(x-3)+ax+b.$$

$$2=f(1)=a\times 1+b,$$

$$4=f(3)=a\times 3+b,$$

解得 $a=1$，$b=1$.

故 $r(x)=x+1$.

例 13 如何求 6^{1000} 被 17 除的余数?

分析：即求 $6^{1000}\equiv ?(\bmod 17)$，当然我们可以用前面的探究法，但比较花费时间，因此这里我们再介绍一种新的方法，即利用欧拉定理来解决. 为了证明欧拉定

理,需要作一些铺垫工作 介绍完全剩余系与简约剩余系的概念和相关性质.

§3 完全剩余系与简化剩余系

3.1 完全剩余系

定义 4.4 以正整数 m 为模,则任何整数必与 $0, 1, 2, \cdots, m-1$ 之一同余,全体整数被分成 m 类,形成 m 个以 m 为模的不同的剩余类,a 所在的剩余类用$\bar{a}$来表示. 从每一类中取出一个数为代表如 $0, 1, 2, 3, \cdots, m-1$,则这 m 个数构成一个以 m 为模的完全剩余系.

比如以 6 为模,则 $12, -5, 2, 9, -8, 17$ 是一个完全剩余系. 因为 $12 \in \bar{0}$, $-5 \in \bar{1}$, $2 \in \bar{2}$, $9 \in \bar{3}$, $-8 \in \bar{4}$, $17 \in \bar{5}$.

定理 4.11 k 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 构成模 m 的完全剩余系的充要条件是 $k = m$,且这 k 个数对模 m 两两不同余.

证明: 设给定 k 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 构成模 m 的完全剩余系,所以 $k = m$,由定义知其中任两数都不在同一个剩余类中,则 $a_i \not\equiv a_j \pmod m$,即两两对模 m 不同余.

反之,若 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 两两对模 m 不同余,则它们分别属于相异的剩余类中,又因为 $k = m$,所以这 k 个数构成模 m 的完全剩余系.

定理 4.12 若 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 构成模 m 的完全剩余系,且 $(a, m) = 1$, $b \in \mathbf{Z}$,则 $ax_1+b, ax_2+b, \cdots, ax_m+b$ 也是模 m 的完全剩余系.

证明: 据定理 4.11 只要证当 $i \neq j\ (i, j = 1, 2, \cdots, m)$ 时,$ax_i+b \not\equiv ax_j+b \pmod m$.

若 $ax_i+b \equiv ax_j+b \pmod m$,则 $ax_i \equiv ax_j \pmod m$,又因为 $(a, m) = 1$,所以 $x_i \equiv x_j \pmod m$,这与 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是模 m 的完全剩余系矛盾,故结论成立.

比如 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 是模 8 的完全剩余系,令 $a=5$, $b=2$,那么 $2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37$ 也是模 8 的完全剩余系.

3.2 简化剩余系

定义 4.5 设 $a \in \mathbf{N}$,不大于 a 且与 a 互素的正整数个数称为欧拉函数,记为 $\varphi(a)$. 特别地,规定 $\varphi(1) = 1$.

比如 $\varphi(7) = 6$,这是因为在小于 7 的整数 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 中与 7 互素的有 $1, 2, 3, 4, 5, 6$,共 6 个.

$\varphi(8)=4$，这是因为在小于 8 的整数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 中与 8 互素的有 1, 3, 5, 7，共 4 个.

由欧拉函数和素数的定义我们可以得到欧拉函数的重要性质：

定理 4.13 若 p 为素数，则 $\varphi(p)=p-1$；一般地，$\varphi(a)\leqslant a-2$.

定理 4.14 若 $a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$，则 $\varphi(a)=a\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$，特别地，$\varphi(p^a)=p^a-p^{a-1}$.

定理 4.15 若 a, b 互素，则 $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

定理 4.16 若 $(m,n)=d$，则有 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}$.

例 14 写出 35 和 1800 的欧拉函数.

解：$\varphi(35)=\varphi(5\times 7)=\varphi(5)\times\varphi(7)=(5-1)(7-1)=24$.

$\varphi(1800)=\varphi(18\times 10^2)=\varphi(2^3\times 3^2\times 5^2)=\varphi(2^3)\varphi(3^2)\varphi(5^2)=(2^3-2^2)\cdot(3^2-3)(5^2-5)=480$.

定义 4.6 （简化剩余系）与 m 互素的剩余系共有 $\varphi(m)$ 类，从每一类中取出一个数，则这 $\varphi(m)$ 个数称为模 m 的简化剩余系.

比如 1, 3, 5, 7 是模 8 的简化剩余系；7, 17, 11, 29 也是模 8 的简化剩余系. 前者称为最小正简化剩余系.

易知模 p（p 为素数）的最小正简化剩余系为 $1, 2, \cdots, p-1$.

定理 4.17 k 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 构成模 m 的简化剩余系的充要条件是 $k=\varphi(m)$，$(a_i, m)=1$，$i=1, 2, \cdots, \varphi(m)$，且这 $\varphi(m)$ 个数对模 m 两两不同余.

证明：必要性由定义易证，下证充分性.

因为 $(a_i, m)=1$，即 a_i 与 m 互素，且这 $\varphi(m)$ 个数对模 m 两两不同余，即 $a_i\not\equiv a_j \pmod m$ $(i, j=1, 2, \cdots, \varphi(m), i\neq j)$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(m)}$ 是模 m 的完全剩余系中与 m 互素的数，也即 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 构成模 m 的简化剩余系.

定理 4.18 若 $x_1, x_2, \cdots, x_{\varphi(m)}$ 构成模 m 的简化剩余系，且 $(a, m)=1$，则 $ax_1, ax_2, \cdots, ax_{\varphi(m)}$ 也是模 m 的完全剩余系.

证明：因为 $(a, m)=1$，$(x_i, m)=1$，其中 $i=1, 2, \cdots, \varphi(m)$，且 $x_i\not\equiv x_j \pmod m$，所以 $ax_i\not\equiv ax_j \pmod m$ $(i, j=1, 2, \cdots, \varphi(m), i\neq j)$，据定理 4.17 知 $ax_1, ax_2, \cdots, ax_{\varphi(m)}$ 也是模 m 的完全剩余系.

定理 4.19 若 $(a, m)=1$，则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$，这是著名的欧拉定理.

证明：设 $x_1, x_2, \cdots, x_{\varphi(m)}$ 为模 m 的简化剩余系①，又因为 $(a, m)=1$，由定理 4.18 知 $ax_1, ax_2, \cdots, ax_{\varphi(m)}$ 也是模 m 的简化剩余系，记为②.

所以①中任一个数必与②中某一个数对模 m 同余;反之②中任一个数必与①中某一个数对模 m 同余,所以

$$ax_1ax_2\cdots ax_{\varphi(m)} \equiv x_1x_2\cdots x_{\varphi(m)} \pmod m,$$

即

$$a^{\varphi(m)}x_1x_2\cdots x_{\varphi(m)} \equiv x_1x_2\cdots x_{\varphi(m)} \pmod m.$$

又 $(x_i, m) = 1\ (i = 1, 2, \cdots, \varphi(m))$, 所以 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

定理 4.20 若 p 是素数,则:(1)当 $(a, p) = 1$, 有 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$; (2)$a^p \equiv a \pmod p$.

该定理由费马在 1640 年提出,故也称为费马小定理.

证明:(1) 因为 p 是素数,所以 $\varphi(p) = p-1$, 又 $(a, p) = 1$, 所以 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

(2) 讨论 p 与 a 的关系:

当 $(a, p) = 1$, 由(1)知 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, 从而 $a^p \equiv a \pmod p$, 得证.

当 $(a, p) \neq 1$, 则 $(a, p) = p$, 所以 $p|a$,则 $a \equiv 0 \pmod p$. 由同余的性质知 $a^p \equiv 0 \pmod p$, 从而 $a^p \equiv a \pmod p$.

利用欧拉定理,现在我们来看例 13"求 6^{1000} 被 17 除的余数"的问题,就比较简单了.

解:即求 $6^{1000} \equiv ? \pmod{17}$.

因为 $(6, 17) = 1$, 因为 17 是素数,则据定理 4.20,有 $6^{17-1} \equiv 1 \pmod{17}$, 即 $6^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. $6^{1000} = 6^{16\times 62+8} \equiv 1^{16\times 62} \times 6^8 \equiv 2^4 \equiv 16 \pmod{17}$. 所以余数为 16.

例 15 今天是周日,求过 5^{2003} 天后是星期几?

解法一:$5^2 \equiv 4 \pmod 7$, $5^3 \equiv 20 \equiv -1 \pmod 7$, $5^6 \equiv 1 \pmod 7$, 因为 $2003 = 333 \times 6 + 5$, 所以

$$5^{2003} = (5^6)^{333} \times 5^5 \equiv 5^5 = 5^2 \times 5^3 \equiv -4 \equiv 3 \pmod 7.$$

故过 5^{2003} 天后是星期三.

解法二:因为 $(5, 7) = 1$, 又因为 7 是素数,据定理 4.20 得到 $5^6 \equiv 1 \pmod 7$, 下面的求解与解法一同.

例 16 求 243^{402} 的最后三位数字.

解:即求 $243^{402} \equiv ? \pmod{1000}$ 的最小正整数.

因为 $(243, 1000) = 1$, $\varphi(1000) = \varphi(2^3 \times 5^3) = 2^3 \times 5^3 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 400$,

所以

$$1 \equiv 243^{\varphi(1000)} \equiv 243^{400} \pmod{1000},$$

$$243^{402} \equiv 243^{400+2} \equiv 243^2 = 59\,049 \equiv 49 \pmod{1000},$$

故最后三位数为 049.

例 17 2013^{2013} 的末两位数是多少?

分析：即要求 $2013^{2013} \equiv ? \pmod{100}$

解：$\varphi(100) = \varphi(10^2) = \varphi(2^2 \times 5^2) = \varphi(2^2) \times \varphi(5^2) = (2^2 - 2^1)(5^2 - 5^1) = 2 \times 20 = 40$，$(2013, 100) = 1$，则 $2013^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$，即 $2013^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.

$$2013^{2013} \equiv 2013^{40 \times 50 + 13} \equiv 2013^{13} \pmod{100},$$

$$2013 \equiv 13 \pmod{100},\ 2013^2 \equiv 13^2 = 169 \equiv 69 \pmod{100},$$

$$2013^3 \equiv 69 \times 13 = 897 \equiv 97 \equiv -3 \pmod{100},$$

$$2013^{13} = (2013)^{3 \times 4} \times 2013 \equiv (-3)^4 \times 13 = 1053 \equiv 53 \pmod{100},$$

故末两位数是 59.

§4 同 余 式

4.1 一次同余式

定义 4.[illegible]（一元 n 次同余式） 同余式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{m}$ 称为一元 n 次同余式，其中 $m \nmid a_n$，$a_i \in \mathbf{Z}$.

定义 4.[illegible]（同余式的解） $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一整系数多项式，若有一整数 C，可使 $f(C) \equiv 0 \pmod{m}$，则 C 称为同余式 $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ 的根或解.

注：

(1) 同余式的解是一个或几个剩余类而不仅是一个或几个数.

(2) 凡对模 m 同余的数，算作一个解，只有对模 m 不同的余数才是不同的解. 如 $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$ 有两解，$x \equiv 1 \pmod{5}$，$x \equiv 4 \pmod{5}$.

这里仅对一次同余式讨论.

定理 4.21 对同余式 $ax \equiv b \pmod{m}$，当 $(a, m) = 1$ 时，有且只有一个解.

证明：因为 $0, 1, 2, \cdots, m-1$ 是模 m 的完全剩余系，记为①，又 $(a, m) = 1$，所以 $0, a, 2a, 3a, \cdots, (m-1)a$ 也是模 m 的完全剩余系，记为②.

据完全剩余系的性质，在②中，有且只有一个数与①中的某个数模 m 相等，即

存在一个 $r\in\{1, 2, \cdots, m-1\}$ 使得 $ru\equiv b\pmod m$，所以 $x\equiv r\pmod m$.

定理 4.22 当 $(a, m)=d$，且 $d\nmid b$ 时，$ax\equiv b\pmod m$ 无解.

证明：(反证)若有解，则 $ax_0\equiv b\pmod d$，因为 $d\mid a$，即 $a\equiv 0\pmod d$，则 $b\equiv 0\pmod d$，即 $d\mid b$，与条件 $d\nmid b$ 矛盾，故结论成立.

定理 4.23 当 $(a, m)=d$，且 $d\mid b$ 时，$ax\equiv b\pmod m$……①有 d 个解.

分析：说明 a, b, m 中都有约数 d，据同余的基本性质将其约简，然后先求最简同余方程的解，然后再求原方程的解.

证明：因为 $(a, m)=d$，且 $d\mid b$，所以 $a=da_1, m=dm_1, b=db_1$.

又因为 $ax\equiv b\pmod m$，将上式代入得 $da_1x\equiv db_1\pmod{dm_1}$，

$(a, m)=(da_1, dm_1)=d$，$(a_1, m_1)=1$，故得 $a_1x\equiv b_1\pmod{m_1}$. ……②

据定理 4.21，②有唯一解. 设 $x\equiv r\pmod{m_1}$，$0\leqslant r\leqslant m_1-1$ 是同余式②的解，有 $m_1\mid a_1r-b_1$，$dm_1\mid d(a_1r-b_1)$，即 $m\mid ar-b$，所以②的解都是①的解.

在 $0, 1, 2, \cdots, m-1$ 这 m 个数内有 $r, r+m_1, r+2m_1, \cdots, r+(d-1)m_1$ 共 d 个数都是②的解，同时也是①的解，对于同余式②是一个解，但对同余式①是 d 个解.

例 18 解同余式 $8x\equiv 9\pmod{11}$.

解：因为 $(8, 11)=1$，由定理 4.21 知该同余式有唯一解.

解法一：$8x\equiv 9\pmod{11}$，$32x\equiv 36\pmod{11}$，$-x\equiv 3\pmod{11}$，$x\equiv 8\pmod{11}$.

解法二：利用定理 4.19，若 $(a, m)=1$，则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$，进行证明，有 $ax\equiv b\pmod m$，可得 $a^{\varphi(m)}x\equiv ba^{\varphi(m)-1}\pmod m$，$x\equiv ba^{\varphi(m)-1}\pmod m$ 为解，故 $8x\equiv 9\pmod{11}$，$x\equiv 9\times 8^{\varphi(11)-1}\pmod{11}$，而 $\varphi(11)=10$，所以 $x\equiv 9\times 8^9\equiv(-2)(-3)^9\equiv 6\times 9^4\equiv 6\times(-2)^4\equiv 6\times 16\equiv 6\times 5\equiv 30\equiv 8\pmod{11}$.

解法三：因为 $(a, m)=1$，所以存在 $s, t\in\mathbf{Z}$ 使得 $as+mt=1$，即 $as\equiv 1\pmod m$. 因此对 $ax\equiv b\pmod m$，有 $asx\equiv bs\pmod m$，利用 $as\equiv 1\pmod m$，得 $x\equiv bs\pmod m$ 为同余式 $ax\equiv b\pmod m$ 的解.

因为 $3\times 11-4\times 8=1$，$-4\times 8\equiv 1\pmod{11}$，$-4\times 8x\equiv -4\times 9\pmod{11}$，故 $x\equiv -4\times 9\equiv -36\equiv 8\pmod{11}$ 为原同余式的解.

例 19 解同余式 $4x\equiv 1\pmod{15}$.

解：$4x\equiv 1\equiv 16\pmod{15}$，则 $x\equiv 4\pmod{15}$.

4.2 同余式组

“今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”这个问题最好的解法是应用著名的中国剩余定理.

为此我们先要介绍中国剩余定理，然后来解答.

定理 4.24 （中国剩余定理）设 $n \geqslant 2$, m_1, m_2, …, m_k 是两两互素的正整数，则方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \cdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k}, \end{cases}$$

有且只有一个解

$$x \equiv M_1M_1^{-1}a_1 + M_2M_2^{-1}a_2 + \cdots + M_kM_k^{-1}a_k \pmod{M},$$

其中 $M = m_1m_2\cdots m_k$, $M_i = \dfrac{M}{m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, $M_iM_i^{-1} = 1 \pmod{m_i}$.

分析：设法找到一个 t，使得 $t = a_i \pmod{m_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，然后证明解唯一.

证明：

(一) 解的存在性

因为 m_1, m_2, …, m_n 两两互素，则

$$(M_1, m_1) = (M_2, m_2) = \cdots = (M_n, m_n) = 1,$$

即 $(M_j, m_j) = 1(j = 1, 2, \cdots, n)$，其中 $M_i = m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_n$.

又根据一元同余式有解的充要条件可知，则下列 k 个同余式

$$M_jx \equiv 1 \pmod{m_j} \ (j = 1, 2, \cdots, k)$$

中的每一个都有解，不妨设这 k 个解为 b_1, b_2, …, b_k，即

$$M_jb_j \equiv 1 \pmod{m_j} \ (j = 1, 2, \cdots, k). \qquad ①$$

构造

$$R = M_1M_1^{-1}a_1 + M_2M_2^{-1}a_2 + \cdots + M_nM_n^{-1}a_n,$$

据①得到

$$M_jb_j \equiv 1 \pmod{m_j},$$

又因为

$$a_j \equiv a_j \pmod{m_j},$$

所以有

$$M_jb_ja_j \equiv a_j \pmod{m_j} \ (j = 1, 2, \cdots, k).$$

根据 M_j 的构造所知，$m_i \mid M_j (i \neq j)$，即

$$M_j \equiv 0 \pmod{m_i} \ (i \neq j), \qquad ②$$

所以得到

$$R = M_1M_1^{-1}a_1 + M_2M_2^{-1}a_2 + \cdots + M_nM_n^{-1}a_n \equiv M_jb_ja_j \pmod{m_j},$$

而 $M_jb_ja_j \equiv a_j \pmod{m_j}$，所以得到 $R = M_jb_ja_j \equiv a_j \pmod{m_j}$，这说明了 R 是所给的同余组的一个公共解，所以解存在.

$x \equiv R \pmod M$，即 $x \equiv M_1M_1^{-1}a_1 + M_2M_2^{-1}a_2 + \cdots + M_nM_n^{-1}a_n \pmod M$.

（二）解的唯一性

设同余式组若还有解 $S \equiv a_j \pmod{m_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$，因为 $R \equiv a_j \pmod{m_j}$，据这两个式子，和同余的性质可以推出 $R - S \equiv 0 \pmod{m_i}$，则 $m_i \mid (R-S)$，而 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是两两互素，所以有 $m_1m_2\cdots m_k \mid (R-S)$，从而 $R \equiv S \pmod M$.

综合(一)(二)，证明完毕.

例 20 前述“物不知其数”问题.

解：据题意得同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

因为 $m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 7$ 两两互素，故可应用中国剩余定理，据题意 $M = 3 \times 5 \times 7 = 105$，$M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{105}{3} = 35$，$M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{105}{5} = 21$，$M_3 = \frac{M}{m_3} = \frac{105}{7} = 15$；$M_1M_1^{-1} \equiv 1 \pmod 3$，即 $35M_1^{-1} \equiv 1 \pmod 3$，$2M_1^{-1} \equiv 1 \pmod 3$，$4M_1^{-1} \equiv 2 \pmod 3$，求得 $M_1^{-1} \equiv 2 \pmod 3$. $M_2M_2^{-1} \equiv 1 \pmod 5$，即 $21M_2^{-1} \equiv 1 \pmod 5$，求得 $M_2^{-1} \equiv 1 \pmod 5$，$M_3M_3^{-1} \equiv 1 \pmod 7$，即 $15M_3^{-1} \equiv 1 \pmod 7$，求得 $M_3^{-1} \equiv 1 \pmod 7$.

所以同余式组的解为

$$\begin{aligned} x &\equiv M_1M_1^{-1}a_1 + M_2M_2^{-1}a_2 + \cdots + M_kM_k^{-1}a_k \pmod M \\ &\equiv 35 \times 2 \times 2 + 21 \times 1 \times 3 + 15 \times 1 \times 2 = 233 \equiv 23 \pmod{105}, \end{aligned}$$

故 $x = 23 + 105t$ $(t = 0, 1, 2, \cdots)$，所以该物最少有 23 个.

例 21 韩信点兵，有兵一队，若队成 5 列纵队，则末行 1 人；若队成 6 列纵队，

则末行 5 人；若队成 7 列纵队，则末行 4 人；若队成 11 列纵队，则末行 10 人，求兵数？

解：据题意得同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5}, \\ x \equiv 5 \pmod{6}, \\ x \equiv 4 \pmod{7}, \\ x \equiv 10 \pmod{11}. \end{cases}$$

因为 5，6，7，11 两两互素，可用中国剩余定理，得到：

$M = m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4 = 5 \times 6 \times 7 \times 11 = 2310$，$M_1 = \dfrac{M}{m_1} = \dfrac{2310}{5} = 462$，$M_2 = \dfrac{M}{m_2} = \dfrac{2310}{6} = 385$，$M_3 = \dfrac{M}{m_3} = \dfrac{2310}{7} = 330$，$M_4 = \dfrac{M}{m_4} = \dfrac{2310}{11} = 210$.

$M_1 M_1^{-1} \equiv 1 \pmod{5}$，即 $462 M_1^{-1} \equiv 1 \pmod{5}$，$2M_1^{-1} \equiv 1 \pmod{5}$，$M_1^{-1} \equiv 3 \pmod{5}$.

$M_2 M_2^{-1} \equiv 1 \pmod{6}$，即 $385 M_2^{-1} \equiv 1 \pmod{6}$，$(64 \times 6 + 1) M_2^{-1} \equiv 1 \pmod{6}$，$M_2^{-1} \equiv 1 \pmod{6}$.

$M_3 M_3^{-1} \equiv 1 \pmod{7}$，即 $330 M_3^{-1} \equiv 1 \pmod{7}$，$(47 \times 7 + 1) M_3^{-1} \equiv 1 \pmod{7}$，$M_3^{-1} \equiv 1 \pmod{7}$.

$M_4 M_4^{-1} \equiv 1 \pmod{11}$，即 $210 M_4^{-1} \equiv 1 \pmod{11}$，$(11 \times 19 + 1) M_4^{-1} \equiv 1 \pmod{11}$，$M_4^{-1} \equiv 1 \pmod{11}$.

$x \equiv M_1 M_1^{-1} a_1 + M_2 M_2^{-1} a_2 + M_3 M_3^{-1} a_3 + M_4 M_4^{-1} a_4 \pmod{M} \equiv 462 \times 3 \times 1 + 385 \times 1 \times 5 + 330 \times 1 \times 4 + 210 \times 1 \times 10 \equiv 2111 \pmod{2310}$，

故 $x = 2111 + 2310t \ (t = 0, 1, 2, \cdots)$，最小数为 2111.

§5 同余与不定方程

定义 4.9 变数个数多于方程个数，且取整数值的方程（或方程组）称为不定方程（或方程组）.

定义 4.10 设整数 $k \geqslant 2$，c，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_k 是整数且 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_k 都不等于零，x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_k 是整数变数. 方程

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_k x_k = c \tag{1}$$

称为 k 元一次不定方程，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_k 称为它的系数.

定理 4.25 不定方程(1)有解的充要条件是$(a_1, a_2, \cdots, a_k)\mid c$. 进而,不定方程(1)有解时,它的解和不定方程

$$\frac{a_1}{g}x_1+\frac{a_2}{g}x_2+\cdots+\frac{a_k}{g}x_k=\frac{c}{g} \tag{2}$$

的解相同,这里$g=(a_1, a_2, \cdots, a_k)$.

证明:必要性显然.

充分性:(先证有解)

若$g\mid c$,设$c=gt$ (t为整数),则存在整数$y_1, y_2, \cdots, y_k$使得

$$a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ky_k=g,$$

两边乘t有

$$a_1y_1t+a_2y_2t+\cdots+a_ky_kt=gt,$$

因此 $$x_1=y_1t, x_2=y_2t, \cdots, x_k=y_kt,$$

为(1)的一组解.

由于(1)有解时必有$g\mid c$,而这时不定方程(1)和(2)是同一个方程,后一个结论得证.

定理4.25表明讨论不定方程(1)的关键是讨论它的系数的最大公约数g. 当$k=2$, $g=1$时上述定理为

定理 4.25 如果$(a, b)=1$, $c\in \mathbf{Z}$, 则$ax+by=c$必有整数解.

定理 4.26 设二元一次不定方程

$$ax+by=c, \tag{3}$$

(这里a、b、c是给定的整数且$ab\neq 0$)有解,x_0, y_0是它的一组解. 那么它的所有解为

$$\begin{cases} x=x_0+\dfrac{b}{(a, b)}t, \\ y=y_0-\dfrac{a}{(a, b)}t, \end{cases} t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4}$$

证明:易证由(4)式给出的x, y,对所有整数t都满足不定方程(3).

反过来,设x, y是(3)的一组解,我们有

$$ax+by=c,$$

又因为题设x_0, y_0是(3)的一组解,则有

$$ax_0 + by_0 = c.$$

两式相减整理得

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0),$$

两边同除(a, b),则有

$$\frac{a}{(a, b)}(x - x_0) = -\frac{b}{(a, b)}(y - y_0),$$

因为 $\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right) = 1$, 所以 $x - x_0 = \frac{b}{(a, b)}t$.

同理可得 $$y - y_0 = -\frac{a}{(a, b)}t.$$

定理 4.26 如果 $(a, b) = 1$, x_0, y_0 是 $ax + by = c$ 的一组解,那么它的全部整数解可用公式表示:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at, \end{cases}$$

其中 t 是任意整数.

例 22 求 $10x - 7y = 17$ 的全部整数解.

解:因为 $(10, 7) = 1$, 故方程有解.由观察法得 $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ 是一组特解,因此全部解为

$$\begin{cases} x = 1 - 7t, \\ y = -1 - 10t, \end{cases} t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

例 23 求不定方程 $18x + 24y = 9$ 的整数解.

解:因为 $(18, 24) = 6$ 不能整除 9,故无解.

例 24 求不定方程 $72x + 23y = 845$ 的整数解的通式.

解:用 x 表示系数较小的 y,得 $y = 36 - 3x + \frac{17 - 3x}{23}$. 令 $\frac{17 - 3x}{23} = u$, 则 $23u + 3x = 17$, 则 $x = f(u) = \frac{17 - 23u}{3} = 5 - 7u + \frac{2 - 2u}{3}$, 令 $\frac{2 - 2u}{3} = v$, 则

$$2 - 2u = 3v,\ u = 1 - v - \frac{v}{2},$$

令 $\frac{v}{2} = t$, 则 $v = 2t$, 将此代入 u 式,得到 $u = 1 - 3t$, 代入 x 得

$$x = -2 + 23t,$$

代入 y 得

$$y = 43 - 72t.$$

由上面我们可以看到不定方程常用的解法有观察法、逐次求整法，此外还有连分数法. 这里由于篇幅有限，未介绍连分数法，感兴趣的读者请参考相关书籍.

例 25 求不定方程 $9x + 16y = 35$ 的所有整数解.

解：解 $9x + 16y = 35$ 与解 $16y = 35 - 9x$ 相同，而此方程可以化为同余式. $16y \equiv 35 \pmod 9$，因为 $(16, 9) = 1$，则该同余式有唯一解，于是得到 $7y \equiv 35 \pmod 9$，约去 7，得 $y \equiv 5 \pmod 9$，也即对某一个整数 t，有 $y = 5 + 9t$，将此代入原方程，得

$$9x + 16(5 + 9t) = 35,$$

$$9x + 144t = -45,$$

$$x = -5 - 16t,$$

因而所有解为

$$\begin{cases} x = -5 - 16t, \\ y = 5 + 9t, \end{cases} \text{其中 } t \text{ 为整数.}$$

这样的解法与直接用定理 4.26′的结果是一致的，因此一次同余式与不定方程在本质上是一类的问题.

例 26 （百鸡问题）鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一，百钱买百鸡，问鸡翁母雏各几何？

解：以 x, y, z 分别代表鸡翁、鸡母、雏鸡的数目，由条件可得下面的不定方程组

$$\begin{cases} 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100, \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

我们要求这不定方程组的非负解，消去 z 可得

$$7x + 4y = 100,$$

先求这个不定方程的非负解. $x = 0$, $y = 25$ 是一组特解. 由上述公式知，它的全部非负解是

$$x = 0 + 4t,\ y = 25 - 7t,$$

$$0 = -\left[\frac{0}{4}\right] \leqslant t \leqslant \left[\frac{25}{7}\right] = 3.$$

即(0, 25), (4, 18), (8, 11), (12, 4). 因此所买的鸡的各种可能的情形是

x	0	4	8	12
y	25	18	11	4
z	75	78	81	84

§6 同余与商集

设全体整数为 $\mathbf{Z}=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$，用 4 除 $\mathbf{Z}$ 中所有的元素，得到的余数为 0、1、2、3 这四种情况，这就把所有整数划分成四大等价类：

$Z_0=\{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}$, $Z_1=\{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}$,

$Z_2=\{\cdots, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots\}$, $Z_3=\{\cdots, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots\}$,

即 $\mathbf{Z}=Z_0\cup Z_1\cup Z_2\cup Z_3$. 这种划分有一个极为鲜明的特点：不漏不重. 也就是说，整数集中的每一个整数一定属于某一类，同一类中两个元素之间都是等价的；而且互不相同的两大类没有公共的元素. 等价划分，不漏不重是我们经常采用的一种数学思想方法.

在同余中，由于每个等价类(或称为剩余类)中的任何一个元素都对 m 有相同的余数，所以都有资格作为所在类的代表，因此我们可以选择最为简单的，也即在运算中最为方便的元素作为代表，而每一类里选取一个代表构成了一个代表团. 这样，我们对某集合的研究就可转化为对代表团的研究，这显然给讨论问题带来了方便. 在上面的例子中，我们就可以将 0、1、2、3 这四个数组成一个以 4 为模的同余关系的代表团.

数学上，把 Z_0、Z_1、Z_2、Z_3 这四个等价类所组成的集合，称为整数集 $\mathbf{Z}$ 关于以 4 为模的同余等价关系 C_4 的商集，记作 $\frac{\mathbf{Z}}{C_4}=\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3\}$. 一般地，若以 m 为模，整数集 $\mathbf{Z}$ 关于同余等价关系 C_m 的商集，就记作 $\frac{\mathbf{Z}}{C_m}=\{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_{m-1}\}=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$，具体见图 1.

一般地，设 R 是集 $A(\neq\varnothing)$ 上的等价关系，把以 A 关于 R 的全部等价类所组成的集合称为 A 关于 R 的商集，记作 $\frac{A}{R}$.

整数集 $\mathbf{Z}$ 关于以 5 为模的同余等价关系 C_5 的商集为 $\frac{\mathbf{Z}}{C_5}=Z_5=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3},$

$\overline{4}\}$，如图 2.

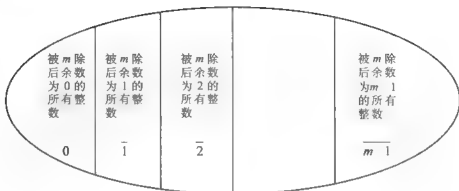


图 1

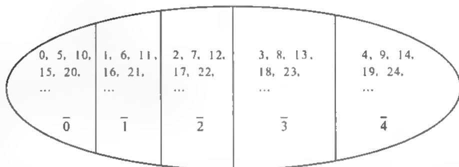


图 2

整数集 $\mathbf{Z}$ 关于以 6 为模的同余等价关系 C_6 的商集为 $\dfrac{\mathbf{Z}}{C_6} = Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

下面我们重点来讨论关于 $\dfrac{\mathbf{Z}}{C_m} = Z_m$ 的性质. 根据商集的定义，我们得到了 Z_m 的元素，关于它的运算我们可以这样定义：任意的 $\overline{a}, \overline{b} \in Z_m$，

$$\text{加法运算："+"}\quad \overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b},$$

$$\text{乘法运算："×"}\quad \overline{a}\times\overline{b}=\overline{a\times b}.$$

证明：(1) 加法运算合理.

任意 $a_1 \in \overline{a}$, $b_1 \in \overline{b}$, 因为 $a_1 \in \overline{a}$, 所以 $\overline{a_1} = \overline{a}$, 从而 $m \mid (a_1 - a)$, 即 $a_1 \equiv a \pmod m$.

同理可得 $\qquad b_1 \equiv b \pmod m$.

所以 $a_1 + b_1 \equiv a + b \pmod m$，所以 $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a + b}$.

(2) 对于乘法运算的合理性可同理证明.

整数集 $\mathbf{Z}$ 与它的商集 $\dfrac{\mathbf{Z}}{C_m} = Z_m$ 之间不是同构而是同态关系，这是因为

$$\sigma:\quad Z \longrightarrow Z_m,$$
$$a \longrightarrow \sigma(a) = \overline{a},$$

σ 不是单射，而是满射. 因为若 $a_1 \equiv a \pmod m$，则 $a_1 \in \overline{a}$，即 $\sigma(a_1) = \overline{a}$，且可以证明

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b),$$
$$\sigma(a \times b) = \sigma(a) \times \sigma(b),$$

即 σ 这个映射保运算，故 σ 是一个同态映射，即 Z 与 Z_m 同态，记为 $\mathbf{Z} \sim Z_m$.

一般若 $\{A, +, \times\}$ 与 $\{B, +, \times\}$ 同构，则用符号 $A \cong B$ 表示，那么这两个集合的性质一样，A 有的性质，B 都具有；反之 B 具有的性质 A 也都具有. 然而同态就不同了，一部分性质被保留，另一部分性质遗失了. 因此整数集 $\mathbf{Z}$ 与整数集 $\mathbf{Z}$ 关于以 m 为模的同余等价关系 C_m 的商集为 Z_m 是同态关系，因此在整数集中的一些性质比如乘法消去律、幂等元性质在 Z_m 中就消失了，具体见下表 1.

表 1　整数集 Z 与 Z_m 比较

$\mathbf{Z}$	$\dfrac{\mathbf{Z}}{C_m} = Z_m$
乘法消去律成立 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或 $b = 0$	$\overline{ab} = \overline{0}$，$\not\Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ 或 $\overline{b} = \overline{0}$ 反例：Z_6 中 $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{2 \times 3} = \overline{6} = \overline{0}$，但 $\overline{2} \neq \overline{0}$，$\overline{3} \neq \overline{0}$. 故乘法消去律不成立
幂等元 $a^2 = a \Rightarrow a = 0$ 或 $a = 1$	$\overline{a^2} = \overline{a} \not\Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ 或 $\overline{a} = \overline{1}$ 反例：Z_6 中 $\overline{3} \times \overline{3} = \overline{3 \times 3} = \overline{9} = \overline{3}$，但 $\overline{3} \neq \overline{0}$，$\overline{3} \neq \overline{1}$. 故幂等元不成立

那么 m 为何值时 Z_m 才能保留 $\mathbf{Z}$ 中的乘法消去律和幂等元性质呢？显然 $m = p$ 素数时即 Z_p，实际上 Z_p 构成域.

本章思考题

1. 证明：素数有无穷多个.
2. 德国一位业余数学爱好者用计算机经过 50 天的运算，在 2005 年 2 月 18 日发现迄今为止最大的素数 $2^{25\,964\,951} - 1$. 这个素数的个位数的数码是多少？

3. 求证：$330 \mid (6^{2n}-5^{2n}-11)$.

4. 解下列同余式：(1) $14x \equiv 27 \pmod{31}$；(2) $6x \equiv 15 \pmod{32}$.

5. 解不定方程 $9x+10y=11$.

6. 数学系在某次运动会上参加团体操，参加者 4 人一排，余下 1 人；5 人一排，余下 2 人；7 人一排，余下 3 人，问该系有多少人参加了团体操？

本章参考文献

[1] 张奠宙，邹一心. 现代数学与中学数学[M]. 上海教育出版社，1990.

[2] 张顺燕. 数学的源与流[M]. 高等教育出版社，2000.

[3] 潘承洞，潘承彪. 初等数论[M]. 北京大学出版社，2003.

第五章　数学证明

证明是数学教学的一个重要组成部分.它的重要性,不仅表现在数学命题需要经过严格的推理论证,才能确认其真实性.更重要的,还在于通过数学证明,有助于学生弄清概念与概念、命题与命题之间以及同一命题的条件与结论之间的本质联系,加深对数学知识的认识,有助于发展学生的逻辑思维能力.

§1　基本概念

所谓数学证明是指引用一些真实的命题来确定某一命题真实性的思维过程.证明可看成特殊的推理.

从逻辑结构来分析,任何证明都由论题、论据、论证三部分组成,也就是数学证明的结构.所谓论题是指需要确定其真实性的那个命题,数学中往往表示成"若……则……"、"如果……那么……"的形式.所谓论据是指被用来证明的理由(定义、公理、定理、推论、公式、性质、法则).所谓论证是指证明的过程即推理的过程.

论题要明确,具有相容性、完备性和独立性.论题应当始终同一;论据要真实;论据不能靠论题来证明,论据必须能推出论题.

证明方法按照不同的分类方式有以下若干种:

按推理的方法来分有演绎法与归纳法两种.演绎法也称演绎推理(一般→特殊),演绎推理有多种形式,在数学证明中应用比较广泛的是三段论推理.归纳法也称归纳推理(特殊→一般),有两种常见的形式:完全归纳法与不完全归纳法.完全归纳法,是通过考察适合论题条件的一切可能情形,从而确定论题的真实性.不完全归纳法,是通过考察适合论题条件的部分特殊情形,从而探索论题的真实性,结论不可靠.

按寻求论证的思路方法来分:可分为综合法和分析法两种.

按直接证还是证明它的等价命题的方法来分,可分为直接证法与间接证法两种.间接证法又可分为反证法、同一法.

本章只讨论两种比较特殊的证明方法:数学归纳法和反证法.

§2 数学归纳法

我们知道，一般来说数学活动大体上可分为三类：一类是建立数学模型，借以反映外部世界和它自身的变化；一类是进行推理工作，借以探索各种因果关系；还有一类就是进行计算工作. 从事数学活动的人都要熟悉这三类工作，但不同的人侧重点可能不同，然而这三方面是彼此联系的.

2.1 演绎与归纳

数学中最基本的推理方法就是归纳法和演绎法. 归纳推理和演绎推理是根据思维过程的不同来加以区分的. 由上面的定义知道归纳是从特殊到一般，演绎则是从一般到特殊.

比如"同弧所对的圆周角是圆心角的一半"的证明就是分成圆心在圆周角的一边上、圆心在圆周角的内部、圆心在圆周角的外部三种情况，具体见图 1.

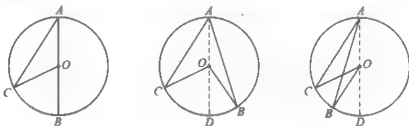


图 1

再比如因为 $1 = 1$,

$1 + 3 = 4$,

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$,

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$,

则大概推出 $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

以上两个结论都是由特殊到一般的推理，都是归纳法，且结论正确. 但上述两个推理是有差别的. 当得到第一个"同弧所对的圆周角是圆心角的一半"这一结论时，是考察了所有特殊情形，后者只考察了四种情形. 所以第一个结论是正确的，其归纳推理也是充分的、完全的；而第二个结论虽然也是正确的，但其归纳是不充分的、不完全的. 后一种推理方法称为归纳法，但是是不完全归纳，下面我们再看一个这方面的例子.

费马数：$f(n)=2^{2^n}+1$，当 $n=0, 1, 2, 3, 4$ 时，$f(n)$ 分别为 3，5，17，257，65 537，可以验证他们均为素数. 如根据上述不完全归纳，那么我们就下结论说：$f(n)=2^{2^n}+1$ 表示的数都是素数，那么就会犯错误，因为恰恰当 $n=5$ 时，$2^{2^n}+1=4\,294\,967\,297=641\times 6\,700\,417$ 是一个合数.

对 $y=x^2+x+72\,491$，当 $x=1$，$x=2$，…，$x=10\,000$ 时，y 都是素数，考察的量可谓够多了，但 $x=72\,490$ 时，$y=72\,491^2$ 不再是素数.

在进行归纳推理时，所考察的特殊情形越多，越能增加对所得到的归纳结论的可信程度. 但是这一结论是否可靠仍不能定论.

因此采用不完全归纳法，是不能证明一个命题为真. 我们已经知道，为了得到数学定理而需要运用归纳推理时，必须运用完全归纳. 当我们所考虑的命题只涉及有限个对象时，我们只要将这种有限种情形一一考察到了就行. 例如，“太阳系的所有大行星都是按椭圆轨道公转的”，这个命题是否成立，只要考察太阳系的所有大行星就行了，然而，太阳系的大行星只有八颗：水星、金星、火星、木星、土星、天王星、海王星、地球，于是，只要考察这八颗星都是按椭圆轨道公转的，就算做了完全归纳，从而可得到“太阳系的所有大行星都是按椭圆轨道公转的”结论成立.

但是数学中常常接触到的命题是涉及无限个对象的，困难也就出在这里，要考察无限多个对象. 比如，“费马猜想”最终被证明那是必须考察所有自然数 n 的情形，而所有的自然数有无限多个.

为了解决这一类问题，即判定一个命题是否对全体自然数都成立，人们创立了“数学归纳法”.

希尔伯特说，数学是“关于无限的科学”. 数学归纳法就是处理无限的办法之一. 要证明一个命题对所有的自然数(无限个)都成立，如果采用从 1，2，3，4 开始一直这样一个一个地验证下去的办法，那是任何人也不可能做完的. 但是自然数是通过“后继”关系组成的，注意到这一点，从而，**数学归纳法**采用了如下的形式：

定理 5.1 设 $P(n)$ 是一个关于自然数 n 的命题，如果

(1) 当 $n=1$ 时，命题 $P(1)$ 成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时，命题 $P(k)$ 成立，可以推出 $P(k+1)$ 成立.

则 $P(n)$ 对一切自然数 n 都成立.

上面也称为**第一数学归纳法**.

例 证明等式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$ 对全体自然数成立.

具体证明略.

这是数学中用有限的步骤(上述数学归纳法证明就是两步)完成无限过程的一例.

数学归纳法实际上是建立在皮亚诺公理的基础上. 即，

公理 5.1 (皮亚诺公理)非空集合 $\mathbf{N}$ 的元素叫做自然数，如果在这个集合里的某些元素之间有一基本关系“后继”，满足下面的公理(在元素 a 的后面加上 1，记为 a'，即记 $a' = a + 1$).

(Ⅰ) $1 \in \mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}$ 中存在一个元素 1；

(Ⅱ) 任给 $a \in \mathbf{N}$，则存在 a'，$a' \in \mathbf{N}$；

(Ⅲ) 若 $a' = b'$，则 $a = b$；

(Ⅳ) 任给 $a \in \mathbf{N}$，有 $a' \neq 1$；

(Ⅴ) 归纳公理：设 M 是自然数集 $\mathbf{N}$ 的非空子集，即 $M \subset N$，且

(1) $1 \in M$；

(2) 对任意 $k \in M$，有 $k' \in M$，

那么 M 就含有一切自然数，即 $M = \mathbf{N}$.

上述公理系统是由意大利数学家皮亚诺在 1889 年建立的，通常称为皮亚诺公理系统. 有了这组公理，就把自然数集里的元素完全确定下来.

数学归纳法实际上就是依据第(Ⅴ)公理的. 事实上，设 P 是一个与自然数有关的命题，又记 M 是使得 P 成立的自然数所组成的集合，因此 M 是 N 的子集. 那么数学归纳法的第(1)步证明就是证明了 1 属于 M；第(2)步就是证明当 n 属于 M 时 $n+1$(n 的后继数)也属于 M，于是依据皮亚诺公理(Ⅴ)，$M = \mathbf{N}$，而 M 等于 $\mathbf{N}$ 表明 P 对全体自然数成立.

由第一章我们已经知道，全体自然数虽有无限多，但它只有可数无限多. 因此我们前面所介绍的数学归纳法还只是对可数无限来讲的. 如果一个命题与不可数无限多个对象有关，那就要采用另外的方法，因此数学中尚有其他的超限归纳法.

数学中还有许许多多命题是涉及无限多个对象的，并非全部采用以上形式加以证明. 例如要证明所有三角形的三边上的高必交于一点，此命题就涉及无限多个三角形，包括无限多个大小不一的三角形，也包括无限多个形状不一的三角形. 这个命题的成立，对于直角三角形、等腰三角形等特殊的三角形来说是极易证明的，但我们不能只对特殊的情形来证明. 为证此命题，必须且只需对任取的三角形来论证. 这个“任取的”很重要，果真是“任取的”，那它就有代表性了，就一般化了，既然对一般化了的三角形命题成立，那么对全体(因而也是无限个)三角形而言命题也成立. 这样，在我们着手证明这一命题之前就已完成了从特殊到一般的过渡、从有限向无限的过渡. 几何学中这类情形特别多，数学的其他领域也很多.

演绎是从一般到特殊的推理，因而“一般”是演绎推理的前提，如果这个前提是正确的，再加上遵循了正确的逻辑规律，那么演绎推理必然导出正确的结论，所以演绎推理是强有力的论证方法.

演绎推理的有效性实际上是以下列的公理为基础的，即

凡肯定(或否定)了某一类对象的全体,也就肯定(或否定)了这一类的对象的部分或个体,事物的属性仍然是该事物的属性.

数学归纳法确系归纳法范畴,但仔细分析,数学归纳法实际上是归纳与演绎的结合物.

数学归纳法的两步证明都是从特殊向一般的推导,这是归纳的一面.但是,整个数学归纳法又是皮亚诺公理的第五条(这个大前提)的一个运用,这又含有演绎的特性.此外当我们把数学归纳法的两步证明结合在一起看时,可以说其中包含了无限多个三段论证(凡直角都相等(大前提),$\angle A$ 和 $\angle B$ 皆为直角(小前提),所以 $\angle A = \angle B$ (结论)),这又是演绎的.

如果我们已经用数学归纳法的两步完成了对命题 P 成立的证明,那么就有下面的无限多个三段式:

若 P 对 1 成立,则 P 对 2 也成立(大前提,依据第(2)步证明),

然而 P 对 1 成立(小前提,依据第(1)步证明),

所以 P 对 2 成立(结论).

若 P 对 2 成立,则 P 对 3 也成立(大前提,依据第(2)步证明),

然而 P 对 2 成立(小前提,依据第(1)步证明),

所以 P 对 3 成立(结论).

若 P 对 3 成立,则 P 对 4 也成立(大前提,依据第(2)步证明),

然而 P 对 3 成立(小前提,依据第(1)步证明),

所以 P 对 4 成立(结论).

…

为什么在数学归纳法中我们只用了两步(有限步)就完成了对一个涉及无限个对象的命题的证明?因为在有了第(1)步做基础之后,第(2)步是一个一般性论证,它可以作无限反复.与前面介绍的几何题联系起来看,在那里,因为所取的几个三角形是任意取的、一般化了的,因而它可代表全体的(无限多个)三角形;在这里因为第(2)步证明是一般性的,因而实际上是可无限重复的.三角形是任取的,具有一般性,因而其证明方法对任何三角形可重复使用.

所以,对数学归纳法,我们可以说,它相当于用一个无限的演绎链条,将特殊归纳推理到一般.这就是它区别于不完全归纳法的地方.数学归纳法是演绎与归纳的结合,但它属于论证推理,由此得出的结论即为真理.

在数学中,不完全归纳推理虽不能属于论证推理,但属于似真推理或合情推理的范围,也是发现真理的有效方法.恩格斯指出“归纳和演绎正如分析和综合一样,是必须互相联系着的,不应当牺牲一个而把另一个捧到天上去,应当把每一个都用到该用的地方,而要做到这一点,只有注意到它们的相互联系,它们的相互补充”.

归纳发现真理，演绎验证猜想. 归纳依赖于直觉，直觉产生于经验. 直觉从本质上说具有某种随机性，因此归纳是不完全推理；演绎依赖于法则，法则从表面上看具有某种主观性，而且用数理逻辑的术语来表述，演绎是重言式的有穷序列，因此一般认为演绎只能传递真理（如三段论），而不能注入真理.

2.2 应用

例 1 设 n 为自然数，求证：$f(n)=5^n+2\times 3^{n-1}+1$ 能被 8 整除.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$f(1)=5^1+2\times 3^{1-1}+1=8$，显然能被 8 整除，所以命题成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 $f(k)=5^k+2\times 3^{k-1}+1$ 能被 8 整除，则当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= 5^{k+1}+2\times 3^k+1 \\
&= 5\times 5^k+6\times 3^{k-1}+1 \\
&= (5^k+2\times 3^{k-1}+1)+4(5^k+3^{k-1}) \\
&= f(k)+4(5^k+3^{k-1}),
\end{aligned}
$$

$4(5^k+3^{k-1})$ 显然能被 8 整除，据归纳假设，$f(k)$ 也能被 8 整除，所以它们的和能被 8 整除，即 $f(k+1)$ 能被 8 整除，命题成立.

根据(1)(2)，对一切自然数 n 命题都成立.

值得注意的是第一数学归纳法有一些变形：

推论 5.1 设 $P(n)$ 是一个关于自然数 $n\ (n\geqslant n_1,\ n_1\in \mathbf{N})$ 的命题，若

(1) 当 $n=n_1$ 时，命题 $P(n)$ 成立；

(2) 在 $P(k)$（k 是不小于 n_1 的自然数）成立的假定下，可以推出在 $P(k+1)$ 成立.

则 $P(n)$ 对一切自然数 n 都成立.

推论 5.2 设 $P(n)$ 是一个关于自然数 n 的命题，若

(1) 当 $n=1, 2, \cdots, l$ 时，命题 $P(n)$ 成立；

(2) 在 $P(k)$（k 是任意的自然数）成立的假定下，可以推出在 $P(k+l)$ 成立，则 $P(n)$ 对一切自然数 n 都成立.

例 2 任一正方形都可以分成 $n\ (n\geqslant 6)$ 个小正方形.

证明：(1) 当 $n=6$ 时，只要将边三等分就可得到 6 个大小不一的正方形，所以命题成立；

(2) 假设当 $n=k\ (k\geqslant 6)$ 时，命题成立. 则当 $n=k+3$ 时，只要在假设 $n=k$ 成立时的 k 个正方形中的任意选一个，将它一分为四即可. 所以命题成立.

注意从 $n=k$ 递推到 $n=k+3$ 跨度为3，所以还必须证明 $n=7$，$n=8$ 时命题成立. 结果显然是正确的，因为任意一个正方形可以分成4个正方形，任选其中一个再将此小正方形一分为四，这就证明了 $n=7$ 时命题是正确的；将一个正方形的边四等分，就可将一个正方形分成8个小正方形，所以 $n=8$ 时命题也成立.

例3 试证大于7的整数可以用若干个3和5连加而得.

证明：(1) 当 $n=8$ 时，因为 $8=3+5$，所以命题成立；

(2) 假设当 $n=k\ (k\geqslant 8)$ 时，命题成立. 即 k 能用若干个3和5连加而得，则 $n=k+1$ 时：

① 若 k 是全由3连加而得，则至少需要三个3(不然 $2\times 3=6<8$，把这三个3换成两个5即得 $k+1$(如 $k=3+3+3$，$k+1=3+3+3+1=10=5+5$).

② 若 k 不是全由3连加而得，则把其中一个5换成两个3即得 $k+1$(如 $k=3+3+3+5$，$k+1=3+3+3+5+1=3+3+3+3+3$).

综上原命题成立.

例4 试证凸 n 边形 $(n\geqslant 3)$ 的对角线的总数 $f(n)=\frac{1}{2}n(n-3)$.

证明：(1) 当 $n=3$ 时，凸 n 边形为三角形，而三角形的对角线数为0. 另一方面 $f(3)=\frac{1}{2}\times 3\times(3-3)=0$，所以 $n=3$ 时命题成立；

(2) 假设当 $n=k\ (k\geqslant 3)$ 时，命题成立. 即凸 k 边形 $(n\geqslant 3)$ 的对角线的总数为 $f(k)=\frac{1}{2}k(k-3)$. 则当 $n=k+1$ 时，凸 n 边形为凸 $k+1$ 边形，它比凸 k 边形增加一个顶点. 因此凸 $k+1$ 边形的对角线总数可以在凸 k 边形的对角线总数 $f(k)$ 的基础上，增加顶点 A_{k+1} 与不相邻的顶点 A_2，A_3，…，A_{k-1} 分别连成的 $k-2$ 条对角线，再加上原凸 k 边形的边 A_1A_k 也成了凸 $k+1$ 边形的对角线，所以共增加了 $(k-2)+1=k-1$ (条)对角线，所以

$$f(k+1)=f(k)+(k-1)=\frac{1}{2}k(k-3)+(k-1)$$
$$=\frac{1}{2}(k^2-k-2)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-3],$$

即当 $n=k+1$ 时，命题成立.

由(1)，(2)知对于任意的自然数 $n\ (n\geqslant 3)$ 命题都成立.

在用数学归纳法解题时，两个步骤缺一不可. 证题的关键是第二步，要合理应用归纳假设，为此在这一步需据题情，运用添减项、拆项、换元、放缩等技巧. 对于从 $n=k$ 推出 $n=k+1$ 的结果时，应注意结构与 $n=k$ 时的结构是否一致，否则不足以证明"归纳"这一步.

数学归纳法除了第一数学归纳法外，还有其他形式具体如下：

定理 5.2 第二数学归纳法(依据最小数原理) 设 $P(n)$是一个关于自然数 n 的命题，如果

(1) $n=1$ 时，命题 $P(1)$成立；

(2) 假设对所有适合 $1 \leqslant m \leqslant k$ 的自然数，命题 $P(m)$都成立，可以推出 $P(k+1)$ 成立.

则 $P(n)$对一切自然数 n 都成立.

特点：它不是由假定 $n=k$ 时命题成立，推出 $n=k+1$ 时命题成立，而是由假定 $n=1, 2, 3, \cdots, k-1, k$ 时命题成立，才推出 $n=k+1$ 时命题成立.

定理 5.3 (反向数学归纳法) 设 $P(n)$是一个关于自然数 n 的命题，如果

(1) 由无穷多个自然数使 $P(n)$成立；

(2) 在 $P(k+1)$成立的假定下，可以证明 $P(k)$成立.

则 $P(n)$对一切自然数 n 都成立.

定理 5.4 (双重数学归纳法) 设 $P(n, m)$是一个含有两个独立自然数 n、m 的命题，如果

(1) $P(1, m)$对任意自然数 m 成立，$P(n, 1)$对任意自然数 n 成立；

(2) 假设 $P(n+1, m)$ 与 $P(n, m+1)$ 成立，可以证明 $P(n+1, m+1)$ 成立.

则 $P(n, m)$对任意自然数 n 和 m 都成立.

注意上述数学归纳法的四种形式本质是一致的.

§3 反 证 法

数学中还有一种重要的证明方法——反证法. 所谓反证法，当证明论题 $p \to q$ 时，不去直接证明它，而是把$\bar{q}$(q 的否定)作为前提，加进原论题的前提，并根据已知真命题和推理规则推出与另一已知真命题或原论题的前提相矛盾的结论，或者导出自相矛盾的结论，从而确立原论题的正确性，这种证明命题的方法叫反证法，这是一种间接证法.

例 5 如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

证明：假设$\sqrt{a}$不大于$\sqrt{b}$，则 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ 或 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$.

(1) 若 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$，因为 $a>0, b>0$，则有 $\sqrt{a}\sqrt{a}<\sqrt{b}\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}\sqrt{b}<\sqrt{b}\sqrt{b}$，从而 $a<b$，与已知条件 $a>b>0$ 矛盾；

(2) 若 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，则 $a=b$，与已知条件 $a>b>0$ 矛盾，所以 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

例 6 若 $a^3+b^3=2$，求证：$a+b\leqslant 2$.

证法一：假设 $a+b>2$，则 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)>2(a^2-ab+b^2)$.

而 $a^3+b^3=2$，故 $(a^2-ab+b^2)<1$.

所以 $1+ab>a^2+b^2\geqslant 2ab$，从而 $ab<1$.

所以 $a^2+b^2<1+ab<2$.

所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab<2+2ab<4$.

所以 $a+b<2$.

这与假设矛盾，故 $a+b\leqslant 2$.

证法二：假设 $a+b>2$，则 $a>2-b$，故 $2=a^3+b^3>(2-b)^3+b^3$，即 $2>8-12b+6b^2$，即 $(b-1)^2<0$，这与任何实数的平方非负矛盾，从而 $a+b\leqslant 2$.

例 7 已知 $0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$，求证：$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 三数不可能都大于 $\frac{1}{4}$.

分析：此命题的形式为否定式，宜采用反证法证明. 假设命题不成立，则 $(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 三数都大于 $\frac{1}{4}$，从这个结论出发，进一步去导出矛盾.

证明：假设 $(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 三数都大于 $\frac{1}{4}$，即

$$(1-a)b>\frac{1}{4},\ (1-b)c>\frac{1}{4},\ (1-c)a>\frac{1}{4}.$$

又因为 $0<a<1$，$0<b<1$，$0<c<1$，

$$\sqrt{(1-a)b}>\frac{1}{2},\ \sqrt{(1-b)c}>\frac{1}{2},\ \sqrt{(1-c)a}>\frac{1}{2},$$

所以

$$\sqrt{(1-a)b}+\sqrt{(1-b)c}+\sqrt{(1-c)a}>\frac{3}{2}. \qquad ①$$

又因为

$$\sqrt{(1-a)b}\leqslant\frac{1-a+b}{2},\ \sqrt{(1-b)c}\leqslant\frac{1-b+c}{2},\ \sqrt{(1-c)a}\leqslant\frac{1-c+a}{2},$$

以上三式相加，即得

$$\sqrt{(1-a)b}+\sqrt{(1-b)c}+\sqrt{(1-c)a}\leqslant\frac{3}{2}. \qquad ②$$

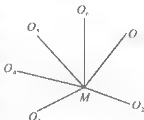
显然①与②相矛盾，假设不成立，故命题得证.

例 8 证明等腰三角形的底角都是锐角.

分析：这个问题的证明可以有很多种方法，若运用反证法，则先假设原结论不成立，即设等腰三角形的底角不是锐角，然后在证明中用上这个已知条件，从而推出矛盾.

证明：不妨记三角形为$\triangle ABC$，其中 $AB=AC$. 假设$\angle B$，$\angle C$都不是锐角，则他们是直角或钝角，因此 $\angle B+\angle C\geqslant 90^\circ+90^\circ=180^\circ$，但这与已有的三角形内角和定理矛盾，因此假设不成立，故等腰三角形的底角都是锐角.

例 9 设平面上有六个圆，每个圆的圆心都在其他圆的外部，试证：平面上任一点都不会同时在六个圆的内部.



证明：如图，假设有一点 M 在 6 个圆的内部. 连结 M 与 6 个圆的圆心 O_1，O_2，…，O_6，则 $O_1M<r_1$，$O_2M<r_2$，…，$O_6M<r_6$，其中 r_i 表示第 i 个圆的半径，因为过 M 的线段有 6 条，所以至少有两条线段的夹角不超过 60°，不妨设 $\angle O_5MO_6\leqslant 60^\circ$，则 O_5O_6 不超过 O_5M 和 O_6M 中较长的线段，不妨设 $O_5M\leqslant O_6M$，则 $O_5O_6\leqslant r_6$，O_5 点不在 O_6 外部，这与已知矛盾. 所以，平面上任一点都不会同时在六个圆的内部.

反证法的关键在于推出矛盾，其实在一开始作假设时就已经蕴含有矛盾了，只是不那么明显，而整个推证过程就是从不明显的矛盾推至明显的矛盾的过程. 综合以上例题可以看出，推出的矛盾大致有：与已知条件矛盾；与假设矛盾；自相矛盾；与已知真命题或事实矛盾.

在逻辑学中，命题一般用小写的字母 p，q，r，s，…表示.

仅由一个简单句构成的命题称为简单命题. 若干个简单命题用逻辑符号，析取“$\vee$”、合取“$\wedge$”、否定“$\neg$”、蕴含“$\rightarrow$”和等值运算“$\leftrightarrow$”联结起来所构成的新命题，称为复合命题. 比如设 p，q 为简单命题，则 $p\wedge q$，$p\vee q$，$\neg p$，$p\rightarrow q$，$p\Leftrightarrow q$ 都是复合命题.

反证法的逻辑原理如下：$p\rightarrow q=\overline{p}\vee q$ 与 $\overline{\overline{p}\vee q}\equiv p\wedge\overline{q}$ 是互相矛盾的两个判断. 根据矛盾律，两个互相矛盾的判断不能同真，必有一假. 在 $p\wedge q$的假设下，通过合乎逻辑推理规则的推理，出现了矛盾，故由 $p\wedge q$假，知 $p\rightarrow q$ 真.

下面五个逻辑等价式更简明地表达了反证法的理论根据：

(1) $p\rightarrow q\equiv\overline{q}\rightarrow\overline{p}$

(2) $p\rightarrow q\equiv(p\wedge\overline{q})\rightarrow\overline{p}$

(3) $p\rightarrow\overline{q}=(p\wedge\overline{q})\rightarrow(r\wedge\overline{r})$

(4) $p\rightarrow q\equiv(p\wedge q)\rightarrow q$

(5) $(p\wedge p')\rightarrow q=(p\wedge\overline{q})\rightarrow p'$

上述五个逻辑等价的证明较易，此处略去. 他们各自反映着反证法在实际证明

运用中的相应形式.

第一种形式是通过证明逆否命题来证明原命题.

第二种形式是把$\bar{q}$作为前提,与已知前提 p 合取推出与前提 p 互相矛盾的结果$\bar{p}$.

第三种形式是把$\bar{q}$作为前提,与已知前提 p 合取推出与前提 p 互相矛盾的两个命题r 与$\bar{r}$. 其中包括公理、定理、已知真命题相矛盾的情形.

第四种形式是把$\bar{q}$作为前提,与已知前提 p 合取推出与$\bar{q}$矛盾的命题q.

第五种形式是把$\bar{q}$与原命题的前提中的 p 合取推出与前提中 p' 相矛盾的命题$\overline{p'}$.

因此,通过证明逆否命题来证明原命题的方法仅是反证法的一种形式,那种把反证法说成是"证明逆否命题"是不确切的.

本章思考题

1. 常用的数学证明方法有哪些?
2. 简述演绎与归纳的关系?
3. 第一、二数学归纳法的理论依据各是什么? 两者之间有何关系?
4. 设 $f(n) > 0$, n 是自然数, 且 $f(2) = 4$, $f(n_1 + n_2) = f(n_1)f(n_2)$, 估计 $f(n)$ 的解析式并用数学归纳法证明.
5. 设 n 为不小于 3 的自然数, 证明: 可将一个正三角形分割成 n 个等腰三角形.
6. 请用多种方法证明$\sqrt{2}$是无理数. 若用反证法则说明是哪一类(五类中).

本章参考文献

[1] 张奠宙,邹一心. 现代数学与中学数学[M]. 上海教育出版社,1990.
[2] 钱珮玲等. 数学思想方法与中学数学[M]. 北京师范大学出版社,1999.

附录

有关这方面的研究论文

年级	性质	作者	指导老师	论文题目
2007	教育学	刘淑婷	李士锜	高二学生数学猜想能力的调查研究
2006	教育硕士	孙 宇	汪晓勤	高一学生对反证法的理解
2003	教育硕士	黄兴丰	李士锜	初三学生几何证明信念的调查

第六章　三等分角与数域扩充

§1　问题的起源

传说在公元前四百多年，希腊的雅典发生了瘟疫，人们为了消除灾难，便向Delos的太阳神庙去求助. 遵照神谕，必须把立方的祭坛增大一倍，疫病才不会流行，一位自作聪明的总设计师将祭坛的每一边增大一倍，做了一个新的祭坛放在太阳神庙里，结果太阳神大怒，疫势更加猖獗. 人们发现新祭坛体积是原来的八倍，而不是两倍. 那么应当怎样做才符合要求呢? 这就是著名的立方倍积问题，也称为Delos问题.

作为一个实际问题，改建祭坛的工作一点也不困难. 不妨设原祭坛的边长为 $a=1$ 米，则新祭坛边长为 $x=\sqrt[3]{2}$ 米. 问题是如何作出$\sqrt[3]{2}$米的长度，在实际施工时，必然采取近似做法，因为可以算出$\sqrt[3]{2}=1.259921 0$，用1.260米为边作一个立方体，它的体积约2立方米，误差不超过0.1立方厘米.

作为一个理论问题，希腊人要求仅用尺规(圆规与直尺)准确地(在理论上)作出长为$\sqrt[3]{2}$的线段，而不是长度近似于$\sqrt[3]{2}$的线段.

§2　尺规作图与数域扩充

圆规、直尺有三个功能，即过已知的两点作一条直线；以一点为圆心，过任一点画圆；在任一射线 OA 上截取线段 OB 与已知线段相等.

所谓尺规作图是指有限多次地使用圆规、直尺(没有刻度的)进行上述三项作图. 希腊人为什么限定用圆规、直尺作图呢? 一方面圆规、直尺是最基本的作图工具，初等几何中的图形也都是由直线与圆组成的，似乎都可以通过尺规作图作出

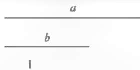
来. 另一方面，希腊的学者，例如柏拉图，非常重视数学在训练智力方面的作用，限制作图工具有助于培养逻辑思维能力. 欧几里得更强调用最少的基本假定(定理、公理)出发，推出尽可能多的命题. 所以，作图工具也相应地剩下少到不能再少的圆规、直尺两种. 下面我们来说明尺规作图与数域之间的关系，为了说清楚关系，作为铺垫需要介绍一些相关概念.

定义 6.1 设 F 是由一些数组成的集合，其中包括 0 和 1. 如果 F 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 F 中的数，那么 F 就称为一个数域.

比如我们熟悉的有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$，还有 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2},\ a,\ b\in\mathbf{Q}\}$ 等都构成数域.

定理 6.1 所有可以用尺规作图的数(线段长度)构成的集合 K 是一个数域.

证明：给定单位长度 1，设 a、b 是可用尺规作出的线段长度.



设 $x=a+b$，$y=a-b$，则图 1 就是所作的长度；



图1

设 $x=ab$，简单变形后得到 $\frac{1}{a}=\frac{b}{x}$，则图 2 就是所求作的线段 ab；

$x=\frac{a}{b}$，则简单的变形后得到 $\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$，则图 3 就是所求作的线段 $\frac{a}{b}$.

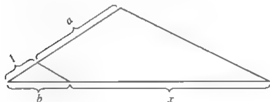


图2

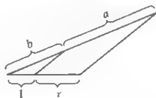


图3

综上所述，长度为 $a+b$，$a-b$，ab 和 $\frac{a}{b}$ 的线段均可作出.

即 $a,\ b\in K\Rightarrow a+b\in K,\ a-b\in K,\ ab\in K,\ \frac{a}{b}\ (b\neq 0)\in K$，因此，$K$ 对

加、减、乘、除运算是封闭的.

从上面的证明可以推出：

定理 6.2 给定单位长度，任一(正)有理数都是可以作图的，即 $\mathbf{Q} \subset K$.

对于无理数情形，我们有

定理 6.3 给定单位长度以及长为 a 的线段，则长度为$\sqrt{a}$的线段是可以作图的，见图 4.

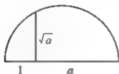


图 4

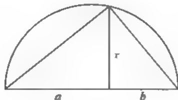


图 5

推论 6.1 给定线段 a, b，则长度 $x = \sqrt{ab}$ 也是可以作出的，见图 5.

定理 6.4 给定单位长度，数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathbf{Q}\}$ 中的任一个数都是可以作图的.

从 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$的结构知 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbf{R}$，它实际上是在数域 $\mathbf{Q}$ 的基础上添加$\sqrt{2}$(即方程的一个根)，再通过四则运算生成的一个域. 注意，这里 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$不仅仅是在 $\mathbf{Q}$ 内添加一个新元素$\sqrt{2}$，而且还强调了 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$中的任意元素 $a+b\sqrt{2}$，经加减乘除后仍然在 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$中，如

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2},$$

不然并不构成域. 类似地，任一个数域 F 添加一个二次无理数 α ($\alpha = \sqrt{d}$, $d \in \mathbf{Q}$) 后，得到的集合 $F[\alpha] = \{a + b\alpha \mid a,\ b \in F\}$ 仍然是域.

因为 a、b、$\sqrt{2}$都是可以作图的，所以我们得到更一般的结论：

定理 6.5 给定单位长度，数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c} \mid a,\ b \in \mathbf{Q},\ c \in \mathbf{Q}$, 但是 $\sqrt{c} \notin \mathbf{Q}\}$ 的任一个数都是可以作图的.

现在，设 $F_0 = \mathbf{Q}$ (有理数域)，

$$F_1 = F_0(\sqrt{c_0}) = \{a_0 + b_0\sqrt{c_0} \mid a_0,\ b_0,\ c_0 \in F_0,\ \sqrt{c_0} \notin F_0\},$$

——第 1 次扩充

$$F_2 = F_1(\sqrt{c_1}) = \{a_1 + b_1\sqrt{c_1} \mid a_1, b_1, c_1 \in F_1, \sqrt{c_1} \notin F_1\},$$

——第 2 次扩充

…

$$F_n = F_{n-1}(\sqrt{c_{n-1}})$$

$$= \{a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{c_{n-1}} \mid a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} \in F_{n-1}, \sqrt{c_{n-1}} \notin F_{n-1}\},$$

——第 n 次扩充

则 $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n$

定理 6.6 给定单位长度，有理数域经过 k 次扩充后所得数域 F_k 中的任一个数都是可以作图的.

一般地，设 x 是可作图的量，那么 x 将属于由有理数域 $\mathbf{Q} = F_0$ 出发的有限个扩域 $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{k-1} \subset F_k \subset \cdots \subset F_n$ 中的某一个.

这个定理也可以这样叙述：

定理 6.6 从单位长度出发，经过有限次有理运算(加、减、乘、除)和开平方运算后所得长度 x 是可以作图的.

例 1 仅用尺规，作出数：$x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}} + \sqrt{2}}$.

分析：一般从有理数域出发，令 $F_0 = \mathbf{Q}$.

第一步：将$\sqrt{3}$添加到 F_0 中去，则得到 F_0 的扩集 F_1，即

$$F_1 = F_0[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in F_0\},$$

可以验证它是个数域，并且 $1+\sqrt{3} \in F_1$.

第二步：将$\sqrt{1+\sqrt{3}}$添加到 F_1 中去，则得到 F_1 的扩集 F_2，即

$$F_2 = F_1[\sqrt{1+\sqrt{3}}] = \{c + d\sqrt{1+\sqrt{3}} \mid c, d \in F_1\},$$

同上可以验证它是一个数域，显然 $\sqrt{1+\sqrt{3}} \in F_2$.

第三步：将$\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}$添加到 F_2 中去，则得到 F_2 的扩集 F_3，即

$$F_3 = F_2\left[\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}\right] = \left\{e + f\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \,\middle|\, e, f \in F_2\right\},$$

同理可以验证它也是个数域，显然 $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \in F_3$.

第四步：将$\sqrt{2}$添加到 F_3 中去，则得到 F_3 的扩集 F_4，即

$$F_4 = F_3[\sqrt{2}] = \{g + h\sqrt{2} \mid g, h \in F_3\},$$

同理可以验证它也是个数域，显然 $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}} + \sqrt{2} \in F_4$.

第五步：将$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}+\sqrt{2}}$添加到 F_4 中去. 则得到 F_4 的扩集 F_5，即

$$F_5 = F_4\left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}+\sqrt{2}}\right].$$

即从有理数出发，将数域一扩再扩，直至扩到所需求作的数 x 所在的数域 F_5.

根据定理 6.6 则 $x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}+\sqrt{2}}$ 是可以用尺规作出的. 事实上，根据前面已知线段 a、b 与单位长 1，可作出它们的四则运算及开平方的结果的讨论. 由已知单位 1 的线段，则可作出 2、3，在此基础上又可分别作出$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$；由 1，$\sqrt{3}$ 可作出 $1+\sqrt{3}$，类似地可作出 $\sqrt{1+\sqrt{3}}$，$\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}$，$\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}+\sqrt{2}$，最后作出$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{3}}}+\sqrt{2}}$.

定理 6.7 如果一个有理系数三次方程没有有理根，那么它的任一根都不能用尺规作出.

证明：反证法. 设三次方程为 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，其中 a, b, c, d 为有理数，$a \neq 0$. 假设 u 是它的一个可以作图的根，设 F_k 是从有理数出发的一系列扩域中第一个含有方程可作图根 u 的扩域，即在 F_k 中含有方程的可作图根，而 F_{k-1} 中没有这样的根. 显然 $k > 0$，将此根记为 $u = p + q\sqrt{r}$，其中 $p, q, r \in F_{k-1}$，但 $\sqrt{r} \notin F_{k-1}$，于是 $v = p - q\sqrt{r}$ 也是方程的根，因此，若方程的第三个根为 w，则由根与系数的关系，得 $u+v+w = 2p+w = -\dfrac{b}{a}$，因此 $w = -2p-\dfrac{b}{a}$，但 $p, a, b \in F_{k-1}$ 故得 $w \in F_{k-1}$，这说明在 F_{k-1} 中含方程的可作图根，与假设矛盾.

那么，我们如何判断一个三次方程有没有有理根呢？请看下面的定理：

定理 6.8 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一整系数多项式，若 $\dfrac{r}{s}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根，且 $(r, s) = 1$，则 $s \mid a_n$，$r \mid a_0$.

推论 6.2 设上述方程中 $a_n = 1$，若方程有有理根，则此根必是 a_0 的约数.

§3 几何作图"三大问题不可能"的证明

由于尺规作图有其局限性. 很多作图问题不能用尺规作图完成，最著名的就

是：立方倍积问题，即求作一个立方体，使它的体积等于已知立方体体积的两倍；三等分任意角的问题，即求作一任意角的三等分；化圆为方的问题，即求作一正方形使它的面积等于一已知圆的面积. 它们被称为几何作图的三大不可能问题.

两千多年来无数的聪明才智倾注在这几个问题之中. 这几个问题，在 19 世纪已解决. 1837 年，汪齐尔(Pierre Laurent Wantzel, 1814—1848)证明了立方倍积与三等分任意角都是不可能尺规作图的. 1882 年林德曼(Ferdinand Lindemann, 1852—1939)证明了 π 是超越数，从而化圆为方也是不可能尺规作图的，下面我们一起回顾一下：

3.1 立方倍积问题

例 2 已知 $ABCD-A'B'C'D'$ 是一个立方体，求作一个新的立方体使其体积为原体积的 2 倍.

该问题转化为数学问题即，设原正方体的边长为 a，而所求立方体的边长为 x，据题意 $x^3=2a^3$，为使问题简单不妨设 $a=1$，则 $x^3=2$.

证法一：根据推论 6.2，如果这个方程 $x^3=2$ 有有理根，则它们必为 ±1，±2 中的一个或若干个，但上面各数都不是原三次方程的根，因此它没有有理根. 根据定理 6.7，它的根(其中之一为 $\sqrt[3]{2}$)不能用尺规作出.

证法二：用反证法. 设 x 是可作图量，按上面的讨论，x 将属于由有理数域 $Q=F_0$ 出发的有限个扩域 $F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_{k-1}\subset F_k\subset\cdots\subset F_n$ 中的一个. 设 $x\in F_k$ 但 $x\notin F_{k-1}$，即 F_k 是包含 x 的最小扩域. 故 $x=p+q\sqrt{\omega}$，$p, q, \omega\in F_{k-1}$，$\sqrt{\omega}\notin F_{k-1}$. 注意这里 $k\neq0$，因 $x\notin F_0=\mathbf{Q}$，这是因为 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数.

下面证明若 $x=p+q\sqrt{\omega}$ 是 $x^3-2=0$ 的根，则 $y=p-q\sqrt{\omega}$ 也是它的根. 事实上，因 $x\in F_k$，x^3 和 x^3-2 也在 F_k 中，故 $x^3-2=a+b\sqrt{\omega}$，$a, b\in F_{k-1}$. 以 $x=p+q\sqrt{\omega}$ 代入上式计算，可得 $a=p^3+3pq^2\omega-2$，$b=3p^2q+q^3\omega$. 同样，用 $y=p-q\sqrt{\omega}$ 代入计算，可得 $y^3-2=a-b\sqrt{\omega}$，这是因为以 $-q$ 代 q，a 不变而 b 将变为 $-b$. 因为 x 是方程的根. 即 $x^3-2=0$，因此 $a+b\sqrt{\omega}=0$，这意味着 $a=b=0$. 理由是：如 $b\neq0$，$\sqrt{\omega}=-\dfrac{a}{b}\in F_{k-1}$，矛盾，故 $b=0$，从而 a 也为 0. 这也就证明了 $y^3-2=a-b\sqrt{\omega}=0$，即 y 也是方程 $x^3-2=0$ 的根. 这里 $x\neq y$. 因为如 $x=y$，则 $x-y=2q\sqrt{\omega}=0$，这得出 $q=0$，即 $x=p\in F_{k-1}$，这与假设矛盾.

然而众所周知，方程 $x^3-2=0$ 只有一个实根，另外两个是复数根，而由上述推论 $p+q\sqrt{\omega}$ 和 $p-q\sqrt{\omega}$ 是方程两个不同实根，这产生了矛盾. 这一矛盾证明了倍立方体不能用尺规作图的结论.

3.2 三等分任意角问题

例3 已知$\angle AOB$是一个任意的角，证明将其三等分是不可能的.

证明：为了举反例说明一般地用圆规直尺不可能三等分任意角，我们不妨取$\alpha = 60^\circ$来讨论.

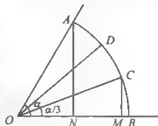


图6

如图6，设$\angle AOB = \alpha$是一个任意角，为方便起见，以角顶点O为中心，以单位长为半径，画一条弧，分别交角的两边于A和B，如果这个角能被三等分，则有二条射线l_1，l_2，弧AB交l_1、l_2于C、D. 问题转化：在弧AB上求得它跟三等分角的射线的任一个交点，假如能够求得一个交点的话，问题也就解决了（因为如能求出C点，则过C点作OB的垂线CM的M点也能作出；反之若OM距离能用尺规作出，则M点能找到，过直线上的点M作OB的垂线MC是可以的，而弧AB肯定可以作出，那么就可有交点D，因此连结OD就是三等分线，则角就能三等分）.

所以找到M点是关键，设$OM = x$，如果x能用有限多次加减乘除和开平方的运算所构成的代数式来表示，那么就可以用尺规作出，问题解决. 如何用一个代数式表示OM的长度呢？回答只要应用简单的三角知识即可. 如图6，因为OA和OB是单位圆的半径$=1$，α又是定角，A一定是定点，所以$ON = \cos\alpha$（这个角度是已知的），$x = OM = \cos\frac{\alpha}{3}$，利用

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha+\alpha) &= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha \\ &= \cos 2\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \\ &= (\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha)\cos\alpha \\ &= [2\cos^2\alpha - 1 - 2(1-\cos^2\alpha)]\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\end{aligned}$$

可得到$\cos\alpha$和$\cos\frac{\alpha}{3}$有这样的关系：

$$\cos\alpha = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \quad ①$$

记$\cos\frac{\alpha}{3} = \cos 20^\circ$为$x$，因为$\alpha = 60^\circ$，则$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$，则上述方程为

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x,$$

即

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \quad ②$$

这样三等分任意角的问题就转化为这个方程的根是否为可作图量的问题. 应用本题开始介绍的定理,如能证明此方程没有有理根,那么三等分 60°就是不可能的. 下面证明这一点,根据定理 6.8,如果这个方程有有理根,则它们必为$\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 中的一个或若干个,可以验证上面各数都不是原三次方程的根,因此它没有有理根. 根据定理 6.7,它的根(其中之一为 $\cos 20°$)不能用尺规作出,问题得证.

3.3 化圆为方问题

在证明化圆为方不可能时,因为要用到一些新概念,因此先介绍,然后再证明.

若复数 ζ 是某个整系数代数方程

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根,则称 ζ 是代数数.

根据定义,显然所有的自然数均为代数数,这是因为 $x - n = 0\ (n \in \mathbf{N})$; 同理所有的整数、所有的有理数均为代数数. 某些无理数也可能是代数数,比如,$\sqrt{2}$ 是方程 $x^2 - 2 = 0$ 的根,故无理数$\sqrt{2}$是代数数. 但不是全部,如 π, e 等. 除此之外某些复数也可能是代数数. 例如,i 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根,故复数 i 是代数数. 因为 $\sin\frac{\pi}{8}$是方程 $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ 的根,所以某些特殊角的三角函数值是代数数.

若 α 不是代数数,则称 α 是**超越数**.

比如 π, e, $2^{\sqrt{2}}$, e^{π}, $\ln r$(r 是有理数)等.

定理 6.9 由所有代数数组成的数集为可列集;而超越数集是不可列集.

定理 6.10 两个代数数的和、差、积、商仍为代数数.

显然,有理数经过有限次的加减乘除或开方运算而得到的数则一定是代数数. 下面回到证明化圆为方不可能问题.

例 4 已知圆的面积,求作一个正方形,使它的面积等于已知的圆面积,证明这件事用尺规是做不到的.

证明: 设已知圆的半径为 r,所求作的正方形的一边长为 x,那么按求作的条

件应有 $x^2 = \pi r^2$，取 $r=1$，则 $x^2=\pi$，所以 $x=\sqrt{\pi}$，而$\sqrt{\pi}$不是一个可作图的量，因为若$\sqrt{\pi}$是一个可作图的量，则一定是某个有理数经过有限次的加减乘除或开方运算而得到的，而根据上述的讨论：有理数经过有限次的加减乘除或开方运算而得到的数则一定是代数数，故$\sqrt{\pi}$是一个代数数，从而 π 是代数数，而这与事实矛盾. 所以化圆为方问题的尺规作图是不可能的.

§4 尺规作图与正多边形

上面我们证完了三个著名的尺规作图不能问题，在日常生活中我们也许更关心哪些图形是可以用尺规作出的，比如在这些图形中最基本的是圆内接正多边形，早在欧几里得时代，就已经得到了用尺规作正三、四、五和十七边形的方法.

例5 仅用尺规能作出正三角形.

证明：略.

例6 仅用尺规能作出正方形.

证明：略.

例7 仅用尺规能作出正五边形.

证明：方法一：利用正十边形（可以利用黄金分割线段. 因为圆内接正十边形的一边等于把圆的半径黄金分割，取较长的那一段）.

黄金分割：分割已知线段，使其中较短一段比上较长一段等于较长一段比全段.

设线段 AB 长为 a，用分点 H 将其分为两段 x 和 $a-x$，则 $\dfrac{x}{a-x}=\dfrac{a}{x}$，

$x^2+ax-a^2=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$. 取 $a=1$ 得 $x=0.618$，黄金分割数.



图 7

方法二：直接分圆成五等分. 通过分析知 $a_5=\dfrac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

理由：设圆半径为 1，如图 8，设 AB 是圆 O 的内接正五边形的一边（用 a_5 表示），C 是弧 AB 的中点，那么 AC 是内接正十边形的一边（用 a_{10} 表示），作$\angle OAC$ 的平分线，交半径 OC 于 D.

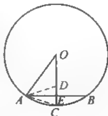


图 8

因为 $\angle O=\dfrac{360^\circ}{10}=36^\circ$，$\angle OAC=\angle OCA=\dfrac{1}{2}(180^\circ$

$36°) = 72°$，所以

$$\angle OAD = \frac{\angle OAC}{2} = \frac{72°}{2} = 36°, \angle ADC = \angle O + \angle OAD = 72°,$$

因此 $\angle O = \angle OAD$，$\angle OCA = \angle ADC$，$OD = AD = AC$.

又因为 $\triangle OAC \backsim \triangle ACD$，所以 $OA : AC = AC : CD$；即 $1 : a_{10} = a_{10} : (1 - a_{10})$，那么 $a_{10} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$；显然 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 不合题意，所以 $a_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

又因为 OC 垂直平分 AB，$\angle O$ 是锐角，所以

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OE,$$

即

$$\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = 2 - 2OE,$$

$$OE = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1),$$

再由勾股定理得：$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{1 - \left[\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)\right]^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$，所以 $a_5 = AB = 2AE = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

现在要直接把圆 5 等分，只要把已知圆的半径当作单位线段，设法作一线段等于 $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. 该线段是否能作出？回答是肯定的(因为它是由有限次的加减乘除和开平方得出的). 从前面的基本作图可知，只要化成 $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ 或 $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ 的形式即可：

$$\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{4 + 5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}} = \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2},$$

而

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2},$$

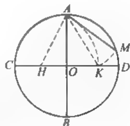


图 9

这样问题完全解决了，我们依据分析，可以由下面的作法，如图 9：

1. 作已知圆(单位圆)的两条互相垂直的直径 AB 和

CD，相交于圆心 O.

2. 平分 CO 于 H $\left(OH = \frac{1}{2}\right)$.

3. 以 H 为中心，HA 为半径画弧，交 OD 于 K.

$$HK = HA = \sqrt{AO^2 + HO^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$OK = HK - HO = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

4. 以点 A 为圆心，AK 为半径，交圆 O 于 M.

5. 那么 AM 就是已知圆内接五边形的一边.

$$AM = AK = \sqrt{AO^2 + OK^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

例 8 仅用尺规不能作出正七边形的边长.

分析：问题转化为是否能求作一个 $\frac{2}{7}\pi$ 的角的问题.

证明：正七边形作图可以归结为求作 $\theta = \frac{2}{7}\pi$ 的角的作图，即 $7\theta = 2\pi$.

因为 $3\theta = 2\pi - 4\theta$，故 $\cos 3\theta = \cos 4\theta$，据三角恒等式，有

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1,$$

$$8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0,$$

令 $x = 2\cos\theta$，代入上式并化简得

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0,$$

于是得到

$$(x-2)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0,$$

若 $x = 2$，则 $\cos\theta = 1$，此时 $\theta \neq \frac{2}{7}\pi$，此解不合题意，因此必有 $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$，由验证知 ± 1 不是方程的根，可见，此方程无有理根，所以正七边形的边长不可能用尺规作出来.

例 9 仅用尺规不能作出正九边形的边长.

证明：设 $\theta = \frac{2\pi}{9}$，则 $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$，即 $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

令 $x = \cos\theta$，则上式可化为 $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

根据定理 6.8 该方程没有有理根，故它的根 $\cos\frac{2\pi}{9}$ 不能用尺规作出. 因此正九

边形的边长也不能用尺规作出.

例 10 仅用尺规能作出正十七边形的边长.

分析：高斯在《算术研究》中得到如下结果：

$$\cos\frac{2\pi}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

由上面的例 5、例 6、例 7 和例 10 可知正三、四、五和十七边形是可以用尺规作出的，在此基础上通过连续地二等分角，就可以用尺规作出具有 2^m，$3\cdot2^m$，$5\cdot2^m$ 和 $17\cdot2^m$ 边的正多边形，这一记录一直保持了 2000 多年. 那么是否有一般的规律呢，1796 年，年轻的高斯对这个结论有了新的改变. 这一年的 3 月，在他差一个月满 19 岁的时候，高斯发现了一个惊人的定理，即：

定理 6.11 一个具有素数条边的正多边形可以用尺规作出的充要条件是其边数为形如 $N=p=2^{2^t}+1$ 的素数.

定理 6.12 正 n 边形可用尺规作出的充要条件是 n 可分解为 2 的幂和不同的费马素数(即 $2^{2^t}+1$ 形式的素数)的乘积，即

$$n=2^m p_1 p_2 \cdots p_k,$$

其中 p_i 是 $2^{2^t}+1$ 型的素数且各不相同(注：这个定理的完整证明需要用到伽罗瓦理论，这里证明略).

有了这个定理，关于仅用尺规等分圆周或作正多边形的可能性问题得到圆满解决. 比如：圆周等分数在 100 以内的，可用尺规作图的仅 24 个，即 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96，其余 76 个均不能.

$n<300$ 时，满足条件的 n 有 37 个：3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.

但当 $n\geqslant300$ 时，如何作以及如何判断 $2^{2^t}+1$ 型的数是素数，仍然很困难，并未得到完全解决.

如果放低要求，将任意角三等分这件事也是可以办到的，方法也很多，在本章结束前介绍重要的三种方法供参考.

方法一：利用有刻度的直尺.



图 10

把所要三等分的$\angle AOB$ 的一边 BO 延长(如图)，再以 O 为圆心，任意的长 r 为半径，画一个半

圆，跟角的另一边相交于 C，过 C 点用直尺作一直线，与半圆和 BO 的延长线交于 E、F 两点，使 EF 恰巧等于圆的半径 r. 具体可以这么作：事先在直尺上记下 E、F 两点，使它们中间的距离等于 r，然后绕 C 点滑动直尺的位置，使直尺上的点 E、F 分别落在半圆和 BO 的延长线上. 这是完全可能的，因此，就得到 $\angle F = \frac{1}{3}\angle AOB$. 因为 $EF = EO = OC$，$\angle AOB = \angle OCE + \angle F = \angle OEC + \angle F = \angle F + \angle EOF + \angle F = 3\angle F$.

方法二：利用双曲线.

希腊数学家帕普斯(Pappus)借助于双曲线三等分一角. 具体如下：如图 11 所示，取离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$ 的双曲线. A、A' 为顶点，O 为双曲线的对称中心，F、F' 为焦点. 易知 AF' 的中垂线 DD' 是此左支曲线的准线. 以 AF' 为弦，作圆弧 $F'CA$，使含有圆周角为已知角；准线 DD' 交此弧于 C. 又以 C 为圆心，$CF' = CA$ 为半径作圆弧交双曲线(左支)于 P，则 $\angle PCF' = \frac{1}{3}\angle F'CA$.

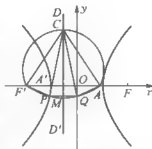


图 11

证明：从作法及双曲线定义可知 $PM = \frac{PF'}{2}$（其中 $PM \perp DD'$），延长 PM 交弧 PMA 于 Q，又连结 QA，显然有，$F'P = PQ = QA$，于是 $\angle F'CP = \angle PCQ = \angle QCA$. 命题得证.

方法三：民间流传的"战斧法".

1835 年一本佚名著作中设计一作法，颇为简洁，经艺术加工后，图形犹如战斧，形象美观，故称为"战斧法". 作法为：如图 12 所示，三等分线段 AD，B，C 为三等分点. 以 BD 为直径作半圆. 过 B 作切线. 将要三等分的已给角 $\angle APQ$ 的顶点在切线上滑动，使其一边过 A，另一边与半圆相切，记切点为 Q，则 PB，PC 为所求的三等分线. 利用三角形全等，即 $\triangle ABP$，$\triangle CBP$ 与 $\triangle CQP$ 全等，就可证明结论成立.

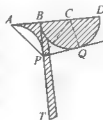


图 12

本章思考题

1. 分别例举三个代数数和超越数.
2. 一元 n 次方程可解的充要条件是什么？
3. 几何作图的三大问题指的是什么？简述"立方倍积"不可能的论证过程.
4. 哪些角可以三等分？简述理由.

5. 介绍 1 至 2 个近似将一个角三等分的方法.
6. 在 100 以内的正多边形中,有多少是可以用尺规作出的? 具体写出并说明其理由.
7. 举一个数域的例子并证明之.
8. 如何证明 π 或 e 是超越数(查阅相关资料).

本章参考文献

张奠宙,邹一心.《现代数学与中学数学》[M]. 上海教育出版社,1990.

附录 1

扩　　域

(1) 引入

$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$$
$$=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

在有理数范围内 x^4-4 只能分解成第一个等式,在域 $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ 内才能分解到第二个等式,可见多项式的因式分解与数域有密切的关系.

一般来说,一个数域 F 上的多项式,可在 F 上不可约,但是将数域 F 扩大后,有可能变成可约的. 那么扩大后的集合是什么呢?

(2) 定义:若数域 F 的数都属于数域 K,则称 K 为 F 的扩域. 记为 $F\subset K$.

一元 n 次方程可解(一次因式)与扩域的关系:

多项式因式分解,其目的多半是为了求根(即将因式分解到一次),而为求方程的根,有时必须把域一次一次的扩大.

一般地说,设方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad ①$$

的系数生成的域为 F,其根域为 F_k(根域:即方程在域 F_k 上可分解为一次因子的乘积,从而可解),则①式可解,等价于数域 F 可以经过有限次添加根式(平方根式)而一扩再扩,直至扩至根域 F_k 为止. 可以证明,对方程①,总存在有限个中间域 F_1, F_2, …, F_{k-1},使 $F=F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_{k-1}\subset F_k$ 成立. 其中每一个 F_i 都是由前一个数域 F_{i-1} 添加 $F_{i-1}(1\leqslant i\leqslant k)$ 中的数所得到的根式(平方根式)而成的扩域.

附录 2

另外一种层面上证明(高等数学)：

先介绍 3 个定理：

定理 1 若 $r=(x, y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的子集 P_0 中的可作图量，K_0 是由点 P_0 的坐标而生成的 $\mathbf{R}$ 的子域，则：

(1) $[K_0[x]:K_0]=2$ (扩大的次数)；

(2) $[K_0[y]:K_0]=2$.

定理 2 设 $K[\alpha]:K_0$ 为单纯扩大，则：

当扩大为超越扩大时 $[K[\alpha]:K]=\infty$；

当扩大为代数扩大时 $[K[\alpha]:K]=\deg m$ (其中 m 是 α 的 K 上的最小多项式的次数).

定理 3(Eisenstein 判定定理)

设 $f(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的多项式，若存在满足下列条件的质数 q，

(1) q 不整除 a_n；

(2) $q|a_i(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$；

(3) q^2 不能整除 a_0.

则 f 在 $\mathbf{Q}$ 上是不可约的.

用上述定理具体证明：

立方倍积问题

$$\alpha^3-2=0.$$

反证：若 α 可用尺规作图，则

$$[Q[\alpha]:Q]=2. \qquad ①$$

又因为 α 是 $\mathbf{Q}$ 上的多项式 $f(t)=t^3-2$ 的根，而 $f(t)=t^3-2$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约(据 Eisenstein 判定定理，存在素数 2，满足 2 不整除 1，2 整除 2，4 不整除 2). 所以 $f(t)=t^3-2$ 是 α 的 Q 上的最小多项式. 因此

$$[Q[\alpha]:Q]=\deg f(t)=3, \qquad ②$$

①与②矛盾，故 α 不是可作图的量.

(从 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Q}[\alpha]$的扩大是代数扩大)

三等分角问题

不妨设这个角为$\frac{\pi}{3}$. 将角$\frac{\pi}{3}$三等分就相当于给定两点(0, 0), (1, 0)作出点

$(\alpha, 0)$，其中 $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{9}$，参见图 13.

如果上述点可作的话，那么也一定能作出点 $(\beta, 0)$，其中 $\beta = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$.

由三角公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$，可得

$$\beta^3 - 3\beta - 1 = 0 \left(设\ \theta = \frac{\pi}{9}\right).$$

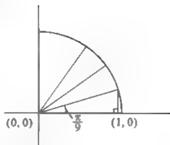


图 13

另一方面根据 Eisenstein 判别法知：$f(t+1) = t^3 + 3t^2 - 3$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，因此 $f(t) = t^3 - 3t - 1$ 在 $\mathbf{Q}$ 上也不可约，故 $f(t) = t^3 - 3t - 1$ 是 β 在 $\mathbf{Q}$ 上的最小多项式，所以 $[Q(\beta):Q] = \deg f(t) = 3$，这与 β 可作图矛盾.

因此用尺规将任意一个角三等分是不可能.

附录 3

尺规作图与代数的关系

以上三个著名的尺规作图问题是用代数方法解决的. 我们不仅要问尺规作图与代数之间有哪些关系？先来看作图公法：

公理

(1) 通过两个已知点可作一条直线.

(2) 已知圆心和半径可作一圆.

(3) 已知两直线，或已知一直线和一圆，或已知两圆，如果相交，可作出交点.

在平面几何中所谓完成了一个作图，就是能把问题归结为有限次上述几个公法作图. 据上述公法，易知尺规的功能可归结为画线、作圆和求交点. 而画直线关键是找出两个点；作圆关键是找圆心和圆周上的点；直线与直线、直线与圆、圆与圆的交点也是找点. 因此尺规作图问题，实质是转化为求点的问题，由解析几何知识知，求交点可用两个方程联立表示，具体见表 1.

表 1　作图公法与解析几何的关系

作图公法	解析几何
通过两个已知点 (a_1, b_1)，(a_2, b_2) 可作一条直线	$(b_2 - b_1)x + (a_1 - a_2)y + a_2b_1 - a_1b_2 = 0$　①
已知圆心 (a, b) 和半径 r 可作一圆	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$　②

作图公法	解析几何
两直线有交点	$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ ③
一直线与一圆有交点	$\begin{cases}ax+by+c=0,\\(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2\end{cases}$ ④
两圆相交	$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2,\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2\end{cases}$ ⑤
点	求交点坐标：有限次的＋、－、×、÷及开平方运算

原来是几何上的图形——直线和圆，却换了一个面目，变成了代数上的方程——二元一次方程和二元二次方程了.

方程① $(b_2-b_1)x+(a_1-a_2)y+(a_2b_1-a_1b_2)=0$，它的系数可以从已知点的坐标用有理运算作图求得.

方程②的另一种形式：$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$，同样它的系数可从已知元素用有理运算作图求得.

方程③的根是：$x=\dfrac{c_2b_1-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$，$y=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$，因此，它也可以用有理运算作图求得.

解方程组④，它的根是：$x=p\pm q\sqrt{s}$，$y=p'\pm q'\sqrt{s'}$ $(s,s'\geqslant 0)$ 其中 p，q，s 与 p'，q'，s' 都是仅含 a，b，c 与 a_1，b_1，c_1 的有理函数，因此，x、y 也可以用有理运算及开平方作图求得.

方程⑤与上述方程组有同解，因此这个方程组的根仍同于方程④的形式，也可以用有理运算及开平方作图求得.

综上所述，在平面上引进坐标后，就把几何作图转化为代数运算：于是，确定点就是确定它们的坐标；确定直线或圆就是确定它们的方程；确定直线与直线、直线与圆、圆与圆的交点就是确定交点的坐标，即求这个方程的解. 由于直线和圆的方程都不超过二次，因此它们的根(交点的坐标)仅施行＋、－、×、÷及开平方即可求得. 反复使用上述公理，也就是反复施行＋、－、×、÷及开平方五种运算，始终不会超过这个范围.

因此，凡可用尺规作图的线段，只能表为 $X=\Phi(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，其中 a_i 是已知线段，而仅含有限次有理运算及开平方的一次齐次式. 换句话说：

用尺规作图的线段 $X=\Phi(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的必要条件是仅含有限次加、减、乘、除及开平方五种运算.

综合上述两方面的叙述，尺规作图可能性准则，从代数来看，可以叙述成如下定理：

定理 尺规作图可能的充要条件是确定所求几何元素的量是一些系数可以作图的一次或二次方程的根.

第七章　对称与群

当我们欣赏自然界的时候，总是感叹自然界的完美对称，有各种各样的有趣图案. 比如我们认为人是对称的、花瓣是对称的、字母 T 是对称的，这些结论很多来自人的直觉，为什么这么说呢？因为在日常生活中，“对称”的含义不够严格，有时与“均衡”、“对等”的意思相同，“对称”的确切定义知道的人可能不多，在这一章我们将寻求一下对称的数学定义. 怎样将其抽象成为数学问题来研究呢？我们考虑简单一点的图形，首先来看问题：

1. 下列图形：梯形，平行四边形，正三角形，正方形，圆，哪些是对称图形？

2. 这些图形中你认为最对称的图形是什么？也许直觉会告诉我们除了梯形以外其他的都是对称的. 圆要比正方形对称，而正方形比正三角形要对称一些，那么这些感觉对吗？如果对的话在数学上有没有合理的解释？

§1　对称的定义

1.1　平面图形的对称

要回答上述问题首先要了解什么叫平面图形的对称，其次如何将它们量化. 这里我们主要探讨平面上有限图形的问题.

我们试图从运动的观点来寻找答案. 对上述给出的图形我们发现正三角形绕其中心旋转 120°，240°或沿其三条中线翻折后能回到自身；正方形能绕其中心旋转 90°，180°，270°或沿其水平线、铅直线和对角线的翻折能回到自身；圆绕圆心的旋转或沿圆心的直线的翻折都能回到自身；平行四边形绕其中心旋转 180°后也能回到自身. 这些图形的共同特点是经过运动后能与自身重叠，因此用描述性语言来刻画一个平面图形 F 是对称的.

　所谓图形的对称就是指经过运动后能够与其自身重叠的图形.

显然，这些运动满足平面上任意两点间的距离保持不变. 根据沙勒(M. Chasles，1793—1880)的研究，平面上保持距离不变的运动有且仅有下列三种：沿任一给定向量的平移；以任意点为中心的旋转；沿某一直线作翻折后再沿该直线上的一个向量作一平移(包括作纯翻折). 所以，把旋转、平移、翻折和它们的相继实施，统称为“保距运动”. 从变换的角度看就是“保距变换”. 平面上的变换，是指到自身的一个对应，平面上的运动是指一个保距变换，即变换后任意两点间的距离是一样的. 为了较完整地了解这部分的知识，先看下面的相关概念.

在上述“运动”的定义下，“不动”也可看作一种“运动”，它可视为旋转0°的“运动”，或平移$\vec{a}=\vec{0}$的“运动”. 这样，任何平面图形都会在某种“运动”下不变，因为它至少在“不动”下不变. 如果一种平面图形(例如一般梯形)只在“不动”这种“运动”下才不变，那么我们就认为该平面图形的对称性最差，也就是我们平时认为的“不对称”.

由这一观点自然的延伸，就可以想到描述平面图形对称性强弱的一种量化的方法. 这就是把所有使某平面图形K不变的“运动”放在一起，构成一个集合，记为$S(K)$，并称其为K的对称集. 集合$S(K)$元素的个数就可以来衡量对称的强弱.

定义7.2 把$S(K)$称为平面图形K的对称.

这样我们就把图形K的直观对称的概念用精确的数学语言——集合$S(K)$来刻画：K的对称就是集合$S(K)$. 也许我们无法“证明”这个$S(K)$就是你心目中的对称，$S(K)$只是我们心目中直观对称概念的一个数学模型，但是从实践来看，这个数学模型是可接受的，是好的.

比如正三角形的对称集是由：恒等运动、绕其中心作120°、240°的旋转以及关于将$\triangle ABC$沿三条中线所做的翻折等平面运动组成，即

$$S(\triangle)=\{I,\ r_{120^\circ},\ r_{240^\circ},\ f_A,\ f_B,\ f_C\},$$

或写成$S(\triangle)=\{I,\ r,\ r^2,\ f,\ fr,\ fr^2\}$，其中$r$表示逆时针旋转120°，$f$表示翻折.

再比如正方形$ABCD$的对称集是由：恒等运动、绕其中心做90°、180°、270°的旋转以及关于两条对角线和两条对边中点连线所做的翻折等平面运动构成，即

$$S(\square)=\{I,\ r_{90^\circ},\ r_{180^\circ},\ r_{270^\circ},\ f_{水平},\ f_{铅直},\ f_{AC},\ f_{BD}\}.$$

我们现在来回答本章开头的问题：在梯形、平行四边形、正三角形、正方形、圆中最对称的图形是什么？为什么？有了上面数学的刻画，现在的回答就不是通过感觉得到的，而是可以通过计算这些图形的对称集合$S(K)$的元素个数即可. 因为$|S(⏢)|=1$，$|S(▱)|=2$，$|S(\triangle)|=6$，$|S(\square)|=8$，$|S(\bigcirc)|=\infty$，也就是对上述图形的对称集进行了量化，由于$|S(\bigcirc)|>|S(\square)|>|S(\triangle)|>$

$S(\square)| > |S(\triangle)|$，所以圆是所有平面图形中最对称的图形，正方形比正三角形要对称，这样我们不仅验证了直觉的正确性，而且给了合理的解释。

1.2 n 元多项式的对称

如同研究“平面图形的对称”时一样，把“n 元多项式的对称”，也从直观的感觉抽象为数学的叙述. 所谓 n 元多项式是指形如 $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的多项式. 以 3 元为例我们来看一下下列多项式中哪个最对称？(1) $f_1 = x_1 + x_2 + x_3$；(2) $f_2 = x_1 + 0x_2 - x_3$；(3) $f_3 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$；(4) $f_4 = x_1^2 + x_2^2$. 我们也试图从运动中的不变性看“多项式对称”.

定义 7.3 我们把多项式中某个 x_i 与 x_j 对换后，使这个多项式不变的置换，称为对称变换.

比如对多项式 $f_1 = x_1 + x_2 + x_3$，如将 x_1 与 x_2 对换，则为 $x_2 + x_1 + x_3$ 与 f_1 相同，即多项式没有变，所以 $\sigma = (12)$ 就是多项式 f_1 的一个对称变换. 类似地我们也可以定义一种描述 n 元多项式对称性强弱量化的方式，即把所有使 n 元多项式 f 不变的“n 元置换”放在一起，构成一个集合记为 $S(f)$，称为 f 的“对称集”. $S(f)$ 中元素个数 $|S(f)|$ 是对 f 的对称性的量化描述. 比如这里是三元多项式，其中 $S(f_1) = \{(12), (13), (23), (123), (213), e\}$，故 $|S(f_1)| = 6$；同理可求得 $|S(f_2)| = 1$，$|S(f_3)| = 3$，$|S(f_4)| = 2$，因此 f_1 最对称，其次为 f_3，f_4，而 f_2 对称性最差，由于 $|S(f_2)| = 1$，即仅在“不动”的运动下保持不变，故 f_2 不对称.

我们在近世代数中已经知道 n 元置换一共有 $n!$ 个. 如果 f 是 n 元多项式，则 $S(f)$ 是全体 $n!$ 个 n 元置换所构成集合的子集合，所以 $|S(f)| \leqslant n!$. 当 $|S(f)| = n!$ 时，任一 n 元置换都将保持 f 不变，这时 f 称为 **n 元对称多项式**.

§2 对称与群的关系

下面把讨论“平面图形的对称”与“n 元多项式的对称”中形成的数学思想综合起来，用“子集对称”的语言来统一地描述客观事物的“对称”. 大千世界千变万化，但变中有不变，比如日升日落，地球绕太阳转等. 同样对集合也是一样，为了说明这点，我们先介绍一些相关的概念.

定义 7.4 设 A 为集合，B 是 A 的子集，把所有使得 $\mu(B) = B$ 的对称变换 μ 构成的集合，称为 B 的对称集，记为 $S(B)$.

定义 7.5 设 M 与 N 为两个非空集合，如果有一个规则 f，通过这个规则 f，对于 M 中的每一个元素 x 都能确定出集合 N 的唯一的一个元素 x'，则称 f 是从

集合 M 到集合 N 的一个映射(对应).

$$f: M \to N,$$
$$x \to x' = f(x).$$

所谓对应 f 是一一对应,即 f 既是单射,又是满射.由 f 是满射可知对于 N 中的每一个元素 x',在 f 之下都有原像 $x \in M$;再由 f 是单射,x' 的这个原像 x 是唯一确定的.于是用映射的定义来衡量,这相当于说有一个规则,它给集合 N 中的每一个元素 x' 在集合 M 中确定唯一的一个像元素 x,使得 $f: x \to x'$,任意 $x' \in N$.因此所说的这个规则是从 N 到 M 的一个映射,我们把这个映射记为 f^{-1},即有

$$f^{-1}: N \to M,$$
$$x' \to x\ (\text{任意 } x' \in N),$$

其中 $f(x) = x'$.

通常把一一映射 $f: M \to N$ 确定的映射 $f^{-1}: N \to M$ 称为 f 的逆映射.显然,f^{-1} 也是一一映射,而 f^{-1} 也有自己的逆映射 $(f^{-1})^{-1}$,并且 $(f^{-1})^{-1} = f$.由此可见,映射 $f: M \to N$ 是双射意味着"成双"地出现两个映射 f 与 f^{-1},二者互为逆映射.

一般地,如果 f 是从集合 M 到其自身的一个映射,即

$$f: M \to M,$$
$$x \to f(x),$$

则称 f 是集合 M 的一个变换,即下面的定义.

定义 7.6 M 是任意一个非空集合,M 的变换是指 M 到自身的一个对应,M 的一一变换是指 M 到自身上的一一对应.

定义 7.7 M 是一个非空集合,f、g 是 M 的两个变换.规定映射 $h(x) = f(g(x))$(对任意的 $x \in M$).易证 h 是 M 的变换,我们称 h 是变换 f 和 g 变换的乘积(或称为合成),记着 $h = fg$.

可以证明 M 的两个一一变换的乘积仍然是一一变换.可以证明变换的乘法满足结合律,即 $f(gh) = (fg)h$.

定义 7.8(恒等变换) 把 M 中的每一个元素 x 对应到 x 本身的变换称为恒等变换,记为 I.即

$$I: M \to M,$$
$$x \to x.$$

可以证明:恒等变换是一一变换;$ff^{-1} = f^{-1}f = I$.

现在我们回到集合中的“变”与“不变”.

“变”是指集合 A 上有特点的一些可逆变换，每个可逆变换 μ 都“改变”了集合 A 中的元素和子集. 这里的“不变”是指对于 A 的一个具体的子集，有些 μ 在整体上保持子集 B 不变，即 $\mu(B)=B$，称这样的 μ 为“B 的对称变换”.

子集 B 的对称集 $S(B)=\{\mu \mid \mu(B)=B\}$ 是一个定义了运算的集合. 如同上面一样，易证 $S(B)$的运算满足下面 4 条运算律：

(1) 封闭律：$S(B)$中任意两个元素 μ_1，μ_2 相继作用的结果 $\mu_1(\mu_2(B))=\mu_1(B)=B$，即仍为整体不变，故 $\mu_1\mu_2$ 仍在 $S(B)$中.

(2) 结合律：$S(B)$中任意三个元素 μ_1，μ_2，μ_3 的运算，可证 $\mu_1(\mu_2\mu_3(B))=(\mu_1\mu_2)\mu_3(B)$.

(3) 存在单位元：$S(B)$中总有一个特殊的元素，即恒等变换，它如同数的乘法中的 1 与任何元素作运算都保持该元素不变.

(4) 每一个元存在逆元：对 $S(B)$中任一元素 μ，与 μ^{-1}（也在 $S(B)$中）相继作用的效果恰相当于(3)中的恒等变换即不动，称 μ^{-1} 为 μ 的逆元.

以上 $S(B)$满足的 4 条重要性质与数学中群的概念非常吻合，群的概念如下：

定义 7.8 群是指一个特定的集合，该集合上的一种运算满足一定的性质. 具体来说，即：G 是一个群，是指

(1) G 是一个集合；

(2) 存在二元运算（记为$\otimes$），它是 $G\times G\to G$ 的一个映射；（封闭性）

(3) G 关于二元运算满足群公理：

(i) 结合性公理　对 G 的任意元素 r，s，t，都有 $r\otimes(s\otimes t)=(r\otimes s)\otimes t$；

(ii) 单位元素公理　在 G 中存在元素 e，使得对 G 中任何元素 r，都有 $r\otimes e=e\otimes r=r$；

(iii) 逆元素公理　对 G 的任何元素 r，都存在 G 中的唯一元素 r^{-1}，使得 $r\otimes r^{-1}=r^{-1}\otimes r=e$.

根据群的定义，显然对称集 $S(B)$构成群，称其为 B 的对称变换群. 综上所述，我们发现原来对称是可以用现代数学中的群来进行刻画. 这使我们想到了一句非常能表现群与对称关系的经典语句“群即对称”. 下面我们来简单回顾一下群概念的由来.

§3　群及其例子

群的来源最初起于方程求解问题. 代数方程是古典代数学的主要内容，最简单

的一、二次方程的求解早为大家所熟悉：

一元一次方程 $ax+b=0\ (a\neq 0)$，则

$$x=-\frac{b}{a}. \tag{1}$$

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，人们在纪元前就已会解，它的根由下列公式表达

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

一元三次方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$ (3) 的求根公式，16 世纪由塔尔塔利亚(Tartaglia, 1499—1557)和卡尔达诺(Cardano, 1501—1576)得到，方法是：作代换 $y=x-\frac{b}{3}$，将(3)化为缺项三次方程 $y^3+py+q=0$ (4)，(4)的根由公式 $y_1=A+B$，$y_2=\omega_1 A+\omega_2 B$，$y_3=\omega_2 A+\omega_1 B$ 给出. 其中 ω_1，ω_2 为三次单位根，

$$A=\sqrt{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ B=\sqrt{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

一元四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的求根公式由费拉里(Ferrari, 1522—1565)给出. 他先将方程变形为

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\lambda\right)^2=x^2\left(\frac{a^2}{4}+2\lambda-b\right)+x(a\lambda-c)+(\lambda^2-d), \tag{5}$$

令右边为完全平方，即由

$$(a\lambda-c)^2=(\lambda^2-d)(a^2+8\lambda-4b),$$

求出 λ 值，代入(5)式，化为

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\lambda\right)^2=(\alpha x+\beta)^2,$$

归结为两个二次方程求解.

人们看到二次方程至四次方程的根，都能用方程系数的根式来表示. 因此人们想继续探求五次方程用方程系数的根式来表达根的公式，亦即研究一元五次方程的根式解问题. 然而经过一百多年的努力，未获成功. 有创意的数学家开始考虑相反的问题：五次方程一般没有根式解. 阿贝尔(Abel, 1802—1829)用高斯(Gauss, 1777—1855)研究二项方程的方法，研究一般情况，证明高于四次的方程，一般没有根式解. 但他的工作没有做完就过早地病逝了. 伽罗华(Galois, 1811—1832)改进了拉格朗日(Lagrange, 1736—1813)的工作，从方程根的置换群入手，用置换群的

理论彻底阐明了代数方程可用代数方法求解的依据，这些后来就发展成为当今代数学中有趣而又很基本的一部分——群论中的伽罗华理论. 每一个代数方程都有一个对称群，即伽罗华群，其抽象结构决定着高次方程的解能否用平方根、立方根之类的根式来表达. $F=\mathbf{Q}(a_1,\cdots,a_n)$ 上的代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

当且仅当它的伽罗华群为可解群时，此方程可用代数方法求解. 五次或五次以上方程一般没有根式解. 伽罗华群可以告诉我们，哪些高次方程的解是可以用由根式组成的有限公式来表达的，但是并不能给出这个公式. 如今的计算机程序不仅可以计算出一个高次方程的伽罗华群，而且能给出求解公式(如果有解的话). 到 1854 年，英国的凯莱(Cayley, 1821—1895)最终给出抽象群的定义，他指出，群的本质结构仅依赖于元素间的二元运算的性质，即上面的群的定义.

群在我们周围有很多，比如：(1)全体整数，全体有理数，全体实数，全体复数，关于通常的加法都构成群，单位元是 0，a 的逆元素是 $-a$. (2)正有理数全体，正实数全体，关于通常的乘法也都构成群，单位元都是 1，a 的逆元素是 $\frac{1}{a}$. (3)四元旋转群. 记 $G=\{L, R, H, I\}$，其中 L 表示向左转，R 为向右转，H 为向后转，I 为不动. G 上定义的二元运算为"接着"$\otimes$，如 $L\otimes R$ 表示先向右转再接着向左转，其余类推. 容易验证，G 关于这一运算确实构成一个群. (4)$\mathbf{Z}_2$ 关于加法构成群；但关于它的乘法就不构成群.

同样，当我们设 $M_1=\{La, Lb, \cdots \mid$ 平面上所有的平移变换$\}$，则$\{M_1, \cdot\}$构成群，称为平移变换群. 设 $M_2=\{Ro(\alpha), Ro(\beta), \cdots \mid$ 平面上所有的旋转变换$\}$，则$\{M_2, \cdot\}$构成群，称为旋转变换群(这两题的证明留给读者).

运算是群的灵魂，如果说集合是一盘散沙，则定义 7.9 中具有性质(1)—(3)的运算，就把集合 G 非常好地组织起来. 谈论关于群的问题时，一定要突出这个运算.

在集合论中，两个等势的集合 M 和 N(M 和 N 之间有一个一一对应)可以认为是"一样"的. 在群论中把两个群$(G, \cdot)$，$(H, \times)$，看成一样的，不仅元素间要存在一个一一对应，而且要保持运算即 $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$，称满足上述条件的两个群同构.

通过上一节对 $S(B)$性质的讨论以及群的定义，容易得到下面的定理：

定理 7.11 $\{S(K), \cdot\}$构成群. 我们称其为平面图形 K 的对称群.

例 1 已知 K 为正三角形，设 I 表示图形不动；r 表示绕正三角形中心旋转 120 度；f 表示沿正三角形中线的翻转，则 $S(\triangle)=\{I, r, r^2, f, fr, fr^2\}$ 对乘法运算(指接着运动)构成群.

证明：(1) 作乘法如表 1：

表 1　乘法表

	I	r	r^2	f	fr	fr^2
I	I	r	r^2	f	fr	fr^2
r	r	r^2	I	f	fr	fr^2
r^2	r^2	I	r	fr	fr^2	f
f	f	fr	fr^2	I	r	r^2
fr	fr	fr^2	f	r^2	I	r
fr^2	fr^2	f	fr	r	r^2	I

注：第一行为先施行的因子，左第一列为后施行的因子.

(2) 由表 1 可知，集合 $S(\triangle)$中的所有元素 $I,\ r,\ r^2,\ f,\ fr,\ fr^2$ 对乘法运算封闭；每一个元均在 $S(\triangle)$中，存在逆元且唯一；元素 I 是集合 $S(\triangle)$的单位元；也可以验证满足结合律. 因此根据群的定义，$S(\triangle)=\{I,\ r,\ r^2,\ f,\ fr,\ fr^2\}$ 对乘法运算(指接着运动)构成群.

例 2　如图所示，设 K 为正方形，I 表示不动，r_{90}，r_{180}，r_{270} 分别表示绕正方形中心旋转 90 度，180 度和 270 度；$f_{水平}$，$f_{铅直}$，f_{AC}，f_{BD} 分别表示绕正方形的水平中线、铅直中线、对角线 AC 和对角线 BD 的翻转，则 $S(\square)=\{I,\ r_{90},\ r_{180},\ r_{270},\ f_{水平},\ f_{铅直},\ f_{AC},\ f_{BD}\}$ 对乘法运算(指接着运动)构成群.

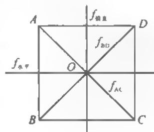


图 2

证明：(1) 作乘法如表 1，其中 $H=f_{水平}$，$V=f_{铅直}$，$D=f_{AC}$，$D'=f_{BD}$.

表 2　正方形的对称集 $S(\square)$中元素间的乘法运算表

	I	r_{90}	r_{180}	r_{270}	H	V	D	D'
I	I	r_{90}	r_{180}	r_{270}	H	V	D	D'
r_{90}	r_{90}	r_{180}	r_{270}	I	D'	D	H	V
r_{180}	r_{180}	r_{270}	I	r_{90}	V	H	D'	D
r_{270}	r_{270}	I	r_{90}	r_{180}	D	D'	V	H
H	H	D	V	D'	I	r_{180}	r_{90}	r_{270}
V	V	D'	H	D	r_{180}	I	r_{270}	r_{90}
D	D	V	D'	H	r_{270}	r_{90}	I	r_{180}
D'	D'	H	D	V	r_{90}	r_{270}	r_{180}	I

(2) 由表 2 可知,集合 $S(\square)$ 中的所有元素 I, r_{90}, r_{180}, r_{270}, $f_{水平}$, $f_{铅直}$, f_{AC}, f_{BD} 对乘法运算封闭;每一个元在 $S(\square)$ 中均存在唯一逆元;且元素 I 是集合 $S(\square)$ 的单位元;也可以验证满足结合律. 因此根据群的定义, $S(\square)=\{I, r_{90}, r_{180}, r_{270}, f_{水平}, f_{铅直}, f_{AC}, f_{BD}\}$ 对乘法运算(指接着运动)构成群.

由于图形的对称性(多项式的对称性)可以由对称群这一代数对象来刻画,即用代数方法研究图形的对称,这有点像笛卡儿坐标系把几何图形和方程式联系起来后,我们在解析几何中,可用代数方法研究几何一样,不同的是在解析几何中我们用的是多项式,这里用的是群.

定义 7.10 设 $\{G, \cdot\}$ 是一个群, H 是 G 的子集,若 H 在运算 $\cdot$ 下也是群,则称 H 是 G 的子群.

定义 7.11 当 $\{G, \cdot\}$ 的集合 G 为有限集时,称 $\{G, \cdot\}$ 是有限群,并把 G 中所含元素的个数叫做群 $\{G, \cdot\}$ 的阶,记为 $\{G\}$;若 $|G|=n$, 则群 $\{G, \cdot\}$ 称为 n 阶群.

定义 7.12 由一个元素 a 生成的群 G,即 $\langle a\rangle=G$, 称为循环群.

定义 7.13 设 n 是正整数,由绕原点旋转 ρ_θ, $\theta=\dfrac{2\pi}{n}$, 所生成的群称记为 C_n.

定义 7.14 由绕原点旋转 ρ_θ 及沿过原点 O 的直线的翻折 r 所生成的阶为 $2n$ 的群称为二面体群,记为 D_n,即 $D_n=\langle\rho_\theta, r\rangle$.

下面我们讨论平面图形的有限对称群的特征与分类.

定理 7.2 设 G 是平面运动群的有限子群,则平面上必有一点 p,使得对任意 $g\in G$, 又 $g(p)=p$.

定理 7.3 设 G 是平面运动群的一个子群,则适当选取坐标系, G 必是下列两种类型之一:

(a) $G=C_n$, 由绕原点的旋转 $\rho_\theta\left(\theta=\dfrac{2\pi}{n}\right)$ 所生成的 n 阶群, $C_n=\langle\rho_\theta\rangle=\{\rho_\theta^i \mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}$;

(b) $G=D_n$, 由绕原点的旋转 $\rho_\theta\left(\theta=\dfrac{2\pi}{n}\right)$ 及沿 x 轴的翻折 r 所生成的阶为 $2n$ 的二面体群 $D_n=\langle\rho_\theta, r\rangle=\{\rho_\theta^i, \rho_\theta^i r \mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}$.

一个平面图形对称群,如果有限的话,必是 C_n 或 D_n,不难对每一个 $C_n(D_n)$ 找出一个平面图形,它的对称群就是 $C_n(D_n)$. 如正 n 边形的对称群是 D_n,这些平面图形就代表了具有有限对称群的所有平面图形,按照这个思路如果把空间运动群的所有有限子群找出来,人们就对正多面体得到完全的分类,从这里我们感受到群论的力量.

对平面有限图形对称群的研究和分类,发现只可能出现以下 6 种不同情形:

(1) 仅由单位(恒等或不动)变换所组成的对称群 K_1,这是任意非对称图形的对称群.

(2) 由单位变换及关于某一直线的翻折组成的对称群 K_2.

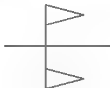
(3) 只有一些旋转组成的对称群 K_3,但其中不含作任意小角度的旋转情况.

(4) 只有一些旋转组成的对称群 K_4,但它含有作任意小角度的旋转.此时,作任意角度 α 的旋转仍属于群 K_4.这里的所有的运动或是图形本身或是旋转,排除了关于直线的翻转.这是平面上有方向的圆环的对称群.

(5) 设在平面上有 n 条过中心 O 点的直线,这些直线分平面为 $2n$ 个等角.对称群 K_5 由关于这些直线的 n 种翻转以及绕 O 旋转的倍角而生成.具有这样对称群的图形包括正 $2n$ 边形.

(6) 由绕 O 点所有旋转及关于所有过 O 点的直线的翻转生成的对称群 K_6.无方向圆及无方向圆环可作为它的例子.


(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)

现实空间为什么会有多种几何体系的表现形式?这是因为几何是研究图形性质的科学,图形有各种各样的性质,各种几何体系都与各自的几何性质相联系,而这类性质往往与某一类变换紧密相关.早在 1872 年,德国数学家克莱因(F. Klein, 1849—1925)在爱尔兰根大学的就职演说"近世几何学研究的比较评论"中就已经总结了射影几何、仿射几何,以及其他几何发展的结果,明确地提出构成这些几何学的普遍原则,也就是考虑空间某种一一变换组成的一个群,研究图形在这个群中一切变换下保持不变的性质,就构成一种几何学,这就是克莱因用变换群刻画几何学的观点,这种观点后来被人们简称为爱尔兰根纲领.

本章思考题

1. 找出正五边形的所有对称关系.

2. 矩形使它不变的运动有哪些？这些运动是否构成群？
3. 证明正方形所有对称关系构成群.
4. 简述群论的来源.
5. 已知 $f=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$，求 $S(f)$，并证明他们构成群？
6. 假设平面由正 n 边形所覆盖，使得相邻的 n 边形总是只有一个公共边，证明 n 的值只可能是 3，4，6.
7. 关于平面有限图形对称群的分类被分成几类？判别右图属于哪一类？



本章参考文献

[1] 刘绍学. 近世代数基础[M]. 高等教育出版社，2001.
[2] 赵小平主编. 现代数学大观[M]. 华东师范大学出版社，2002.
[3] 永尾汎. 代数学[M]. 朝仓书店出版社，1989.

附录(平面格子网对称群)

对称群与自然界及日常生活中许多现象，都有有趣的联系，其中最典型的是铺地砖和晶体.

用正方形或正三角形地砖铺地，可以使砖缝对齐，任意扩展和延伸. 但并不是所有形状的地砖都能如此铺地. 那么可作铺地砖的形状有多少种呢？　我们考察一下地砖铺地时是怎样延伸的.

假设某种形状地砖已将地铺平，可以设想地砖相接的顶点在地上印下了格子点，地砖边线将格子点连成了格子网. 使格子网保持不变的变换——对称变换，构成该格子网的对称群.

于是，一种型号地砖，对应一种格子网，对应一个对称群. 反之，格子网的对称群也对应一种型号的地砖. 因此，地砖形状的种类，归结为平面格子网对称群的个数. 使平面格子网不变的对称变换有：

(1)不动(恒等变换)；(2)转 180°；(3)转 120°；(4)转 90°；(5)转 60°；(6)轴反射(翻转)；(7)由(2)(6)合成；(8)由(3)(6)合成；(9)由(4)(6)合成；(10)由(5)(6)合成；(11)由(2)与平移合成；(12)由(3)与平移合成；(13)由(4)与平移合成；(14)由(5)与平移合成；(15)由(12)与反射合成；(16)由(13)与反射合成；(17)由(14)与反射合成.

因此，平面格子网对称群共有 17 种，对应着铺地砖形状的种类有 17 个.

自然界中晶体在空间构成立体格子网，使立体格子网不变的对称变换群，有32类，共230个．因此，晶体形状也应有230种．20世纪末，经过费多罗夫(Fedrov)，尚富力(Schoenflies)，巴罗(Barlow)等人努力，在自然界中确实找到了全部230种晶体．这是群论应用的极光辉范例．

第八章　开关电路与布尔代数

19 世纪中叶，著名的英国数学家乔治·布尔(G·Boole，1815—1864)发表了逻辑代数的奠基性文章《逻辑的数学分析》和《思维的规律研究》.在这两篇论文中，他巧妙地将逻辑对象符号化、运算化，并运用数学方法进行处理，从此数学开始进入思维的领域.

当今社会，我们已经发现计算机的出现和蓬勃发展彻底改变了人类的生活.作为现代中学生，了解计算机的相关背景知识，不但为将来进一步学习打下基础，同时可进一步理解：高度的抽象性及其带来的符号化、形式化是数学的基本特征之一.不同的实际问题经抽象概括后，可得到相同的数学概念、运算法则乃至同一数学理论.反之，同一数学概念，运算法则和数学理论可应用到表面看来不同的实际问题.

§1　开关电路

问题的提出：要设计一个为三人委员会进行秘密表决的机器的电路.要求信号在二人或二人以上(即按少数服从多数原则进行表决)按下开关，表示同意时亮而其他情况不亮.

要想弄清并解决这一问题，首先我们要了解有关开关电路的一些基本知识.开关是联结电路中的一种装置，它有闭和开两种状态.在闭合状态时，开关允许电流通过，灯就会亮；反之，在断开状态时，电流不能通过，灯不亮.我们也可以说开关是指能行使“接通”与“断开”功能的电气组件.一般用小写字母 p、q、r 等表示开关.当开关 p“断开”时，规定用 $p=0$ 表示，而当它“接通”则用 $p=1$ 表示.灯用 L 表示，同样灯也有两种状况，亮为 1，不亮为 0.在电路上开关可以用以下三种基本方式组合：

(1) 并联：如图 1，表示将两个开关 p、q 并联的电路，此时开关 p、q 中只要有一个接通(两个接通包括其中)则电灯都会亮.假设开关 p、q 只有接通和断开两种

状态,令断开时的状态为 0,接通时的状态为 1,将开关 p 与 q 的并联记为 $p+q$,灯亮和灯灭实际上是 $p+q$ 的两种状态,此时电流接通情况可通过表 1 所示(可以推广任意有限个开关并联的情况).

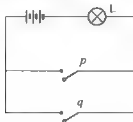


图 1

表 1

p	q	$L=p+q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

在这个例子中,我们看到一种因果关系:在决定事情的各种条件中,只要有一个条件得到满足,这种事情就会发生,这种因果关系叫做“或”逻辑关系.这里是可兼的“或”,同日常用语中的”或”字相当,用“+”或“∨”表示.

(2) 串联:图 2 表示将两个开关 p、q 串联的电路,此时电流在 p 及 q 开关都接通时方能接通. p、q 中只要有一个断开,电灯则不亮.假设开关 p、q 只有接通和断开两种状态,令断开时的状态为 0,接通时的状态为 1,将开关 p 与 q 的串联记为 pq.灯亮和灯灭实际上是 pq 的两种状态,此时电流接通情况可通过表 2 所示(可以推广任意有穷个开关串联的情况).



图 2

表 2

p	q	$L=pq$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

从这个开关串联电路,我们看到另一种因果关系:只有当决定一件事情的各种条件全具备之后,这个事件才能发生.这种因果关系叫做“与”逻辑关系.这里的“与”字同日常用语中的“与”字含义一致,用“·”或“∧”表示.

(3) 逆反:各开关之间并不是没有联系的,我们通常用机械将两个或多个开关联结起来.例如用一个“单刀双掷”开关控制两个指示灯.如图 3 开关上合则灯 L_1 亮,开关下合则灯 L_2 亮,两灯的状态完全相反.

对于这样的开关的两个触点我们分别记作 p 和 $\bar{p}$.当 p 被接通时 $\bar{p}$ 必然断开,而当 p 断开时 $\bar{p}$ 必然接通,因此二者居于完全相反的状态,这样的电路我们称为逆

反电路. 相互关系如表 3 所示：

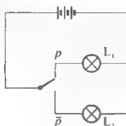


图 3

表 3

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

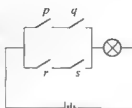


图 4

综合使用上面三种基本联结方式，我们还可组成复杂的电路，如图 4 的电路包含并联和串联两种联结方式. 其上支可表为 $p \cdot q$，而下支可表为 $r \cdot s$，从而全电路可表为 $(p \cdot q)+(r \cdot s)$，简记为 $p \cdot q+r \cdot s$ 或 $pq+rs$，我们称该式为此电路的逻辑表示式.

我们不难发现开关电路对“+”，“·”以及“ ”这三种运算是封闭的，见表 4.

表 4

+	0	1	·	0	1		0	1
0	0	1	0	0	0		1	0
1	1	1	1	0	1			

§2 命 题 演 算

命题是指一个判断的语句. 通常，命题是指闭判断，以区别于开判断，或谓词. 用来表示数学判断的语句或者符号的组合称为数学命题.

命题的定义包括两层涵义：(1)命题必须是一个完整的句子；(2)这个句子必须对某件事情作出肯定或者否定的判断，即命题是判断某一件事情的句子. 在语法上，这样的句子叫做陈述句，它由“题设+结论”构成. 比如：①$3+3=6$；②若两直线无交点，则两直线平行；③2 是偶数而 3 不是偶数；④$(x-1)(x-2)$ 0；⑤$2\times$□ $1-3$. 上述①至③是命题. 其中①③是真命题，②是假命题；④不是命题，因为它的真假依赖于变量 x 的取值. 当变量 x 取 1 或 2 时，语句所述事实是真的，而当 x 取不为 1 且不为 2 的数时，语句所述事实是假的，因此语句有时是真的有时又是

假的，故不是命题. 语句⑤是开句，因此也不是命题.

如果一个命题是真的，我们就说此命题是真命题，其"真值"为 1；反之如果一个命题是假的，则说此命题是假命题，其"真值"为 0. 在逻辑学中，命题一般用小写的字母 p, q, r, s, …表示.

仅由一个简单句构成的命题称为简单命题. 若干个简单命题用逻辑符号，析取"∨"；合取"∧"；否定" "联结起来所构成的新命题，称为复合命题.

由命题 p 及命题 q 通过联结词"或"联结起来所构成的新命题"p 或 q"，记作 $p \vee q$. 它的真假状况称为真值. 如果用符号"1"和"0"分别表示它的真假，命题 $p \vee q$ 为真，当且仅当 p 与 q 中至少有一为真. 命题 $p \vee q$ 为假，当且仅当命题 p 与 q 均为假. 命题 $p \vee q$ 与命题 p，q 之间的真假性关系可用"或"运算的真值表表示，见表 5：

由命题 p 及命题 q 通过联结词"与"联结起来所构成的新命题"p 与 q"，记作 $p \wedge q$，当命题 p 与 q 同时为真时，复合命题 $p \wedge q$ 才为真，其余均为假. 命题 $p \wedge q$ 与命题 p、q 之间的真假性关系可用"与"运算的真值表表示，见表 6.

表 5

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 6

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

命题 p 通过联结词"非"联结起来所构成的新命题"非 p"记作 $\overline{p}$. 它的真值表见表 7.

同样我们不难发现命题代数也有三种运算，且这三种运算也是封闭的，见表 8.

表 7

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

表 8

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\overline{p}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

§3 布尔代数

由开关的"并""串"联和"逆反"产生的新电路的状态$\{0, 1\}$是由原电路的状态$\{0, 1\}$，经过运算$+$、$\times$和余得到的. 由简单命题通过"或""且"和"非"("否定")组成的新命题的真与伪，也是由原命题的真与伪，经过运算$+$、$\times$和余得到的. 他们的共同特点都涉及两个元素$\{0, 1\}$，三种运算$+$、$\times$和余，且对这三种运算均封闭. 由此我们将它们抽象出一个新的数学概念——布尔代数.

定义1 设B是一个至少含有两个不同元素的集合，$+$、$\cdot$、$^{-}$(非)是定义在B上的三种代数运算，如果对任意$a, b, c\in B$. 满足下面公理：

H1(交换律)：$a+b=b+a$，$ab=ba$(以下按惯例，ab即$a\cdot b$)；

H2(结合律)：对任意$a, b, c\in B$，有$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(ab)c=a(bc)$；

H3(分配律)：$a+(bc)=(a+b)(a+c)$，$a(b+c)=ab+ac$；

H4(基元律)：对任意的$a\in B$有：$a+0=a$，$a\cdot 1=a$；

H5(互补律)：对任意$a\in B$，存在$\bar{a}\in B$，使得$a+\bar{a}=1$，$a\bar{a}=0$.

则称集合B及其上面的运算$+$、$\times$、$^{-}$构成一个布尔代数. 记为$(B;+,\cdot,{}^{-})$或$(B;+,\cdot,{}^{-};0,1)$.

当用布尔代数来研究开关电路时，我们称之为开关代数；当用布尔代数来研究命题之间的关系时，我们称之为命题代数. 在这里把命题代数和开关代数统称为布尔代数，它是一种最简单的布尔代数，即二元布尔代数，这里若没有特殊说明，均指二元布尔代数.

设A为非空集合，讨论A的一切子集所构成的集为2^A(即A的幂集)，则前面学习过的集合的并$\cup$与交$\cap$为定义在集2^A上的二元代数运算. 令A为全集，则补运算"$^{-}$"为定义在2^A上的一元代数运算. 对于运算$\cup$与$\cap$来说，$\varnothing$与A是2^A的具有特殊性质的元，因为对于任意的$X\in 2^A$，我们有：

$$\varnothing\cup X=X\cup\varnothing=X;\ \varnothing\cap X=X\cap\varnothing=\varnothing;$$
$$A\cup X=X\cup A=A;\ A\cap X=X\cap A=X.$$

因此$\varnothing$为并运算$\cup$的单位元，而A为交运算$\cap$的零元. A为并运算$\cup$的零元，而$\varnothing$为交运算$\cap$的单位元. 于是$\{2^A, \cup, \cap, {}^{-}, \varnothing, A\}$构成一个代数系统，称为集合代数. 在此例子中$B=2^A$，集的并$\cup$与交$\cap$代替了抽象定义中的"$+$"与"$\cdot$"，$\varnothing$代替了0，$A$代替了1，补元相当于补集. 则集合代数满足布尔代数的全部公理. 事实上这就是集合的基本运算性质. 因此我们不难验证集代数$\{2^A, \cup, \cap, {}^{-}, \varnothing, A\}$是布尔代数.

§4 布尔代数的性质

本节从布尔代数的公理出发，推导出布尔代数所具有的一系列基本性质. 了解布尔代数的这些性质，可以帮助我们理解电路、命题以及集合的问题. 在上一节布尔代数定义中，公理 H4 说明运算“+”存在单位元，且说明运算“·”存在单位元，公理 H5 说明 B 中的任一元 a 存在补元 $\overline{a}$，但是这些单位元与补元是否唯一呢？下面的三个定理肯定地回答了这一问题.

定理 8.1 运算“+”的单位元 0 唯一.

证明：设 $0'$ 也是运算“+”的单位元，即对任意的 $a\in B$ 有 $a+0'=a$，所以

$$\begin{aligned}0&=0+0'(\text{因为 }0'\text{ 为单位元})\\&=0'+0(\text{交换律})\\&=0'.(\text{因为 }0\text{ 为单位元})\end{aligned}$$

定理 8.2 运算“·”的单位元 1 唯一.

证明：与证明定理 8.1 类似.

定理 8.1 与定理 8.2 说明布尔代数中的 0 与 1 是唯一的.

定理 8.3 在布尔代数中，任一元的补元唯一，也就是说对于任意 $a\in B$，如果元 $b\in B$ 满足：

$$a+b=1, \quad ①$$

$$ab=0, \quad ②$$

则 $b=\overline{a}$.

证明：
$$\begin{aligned}b&=b+0(\text{公理 H4})\\&=b+a\overline{a}(\text{公理 H5})\\&=(b+a)(b+\overline{a})(\text{公理 H3})\\&=(a+b)(b+\overline{a})(\text{公理 H1})\\&=1(b+\overline{a})(\text{题设 ①})\\&=(a+\overline{a})(b+\overline{a})(\text{公理 H5})\\&=(\overline{a}+a)(\overline{a}+b)(\text{公理 H1})\\&=\overline{a}+ab(\text{公理 H3})\\&=\overline{a}+0(\text{题设 ②})\\&=\overline{a}.(\text{公理 H4})\end{aligned}$$

由定理 8.3 知，对于任意 $a\in B$ 有唯一的补元 $\overline{a}\in B$ 与之对应. 因此补“$^-$”是定

义在 B 上的一元运算. 于是从布尔代数$\langle B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$的公理出发,我们立即推出在布尔代数中除了"+"与"·"两个二元运算以外,实际上一定还有一种一元运算"$\bar{}$",我们称为补运算. 布尔代数的这三种运算$(+, \cdot, \bar{})$统称为布尔运算.

定理 8.4 $\bar{\bar{a}} = a$, 即如果$\bar{a}$是 a 的补元,则 a 是$\bar{a}$的补元.

证明:由于$\bar{a}$是 a 的补元,所以由公理 H5 知 $a+\bar{a}=1$, $a\bar{a}=0$, 根据公理 H1,得到 $\bar{a}+a=1$, 且$\bar{a}a=0$, 于是由定理 8.3 知, a 为$\bar{a}$ 的补元,即$\bar{\bar{a}}=a$.

定理 8.5 (1) $a0=0$; (2) $a+1=1$.

证明:(1) $a0 = a0+0$(公理 H4)

$= a0+a\bar{a}$(公理 H5)

$= a(0+\bar{a})$(公理 H3)

$= a(\bar{a}+0)$(公理 H1)

$= a\bar{a}$(公理 H4)

$= 0$.(公理 H5)

(2) $a+1 = (a+1)1$(公理 H4)

$= (a+1)(a+\bar{a})$(公理 H5)

$= a+1\bar{a}$(公理 H3)

$= a+\bar{a}1$(公理 H1)

$= a+\bar{a}$(公理 H4)

$= 1$.(公理 H5)

推论 8.1 $0 \neq 1$.

证明:用反证法.

假设 $0=1$, 则对任意 $a \in B$,有

$$a = a1\text{(公理 H4)}$$
$$= a0\text{(题设)}$$
$$= 0,\text{(定理 8.5)}$$

此与 B 中至少有两个不同元矛盾,所以 $0 \neq 1$.

定理 8.5 中(1)说明 0 是运算"·"的零元,(2)说明 1 是运算"+"的零元. 在布尔代数定义中我们知道 0 是运算"+"的单位元,1 是运算"·"的单位元. 该定理的推论告诉我们在布尔代数中两常数 0 与 1 是不相同的元.

定理 8.6(幂等律)

(1) $aa=a$;

(2) $a+a=a$.

证明：(1) $aa = aa + 0$(公理 H4)

$= aa + a\overline{a}$(公理 H5)

$= a(a+\overline{a})$(公理 H3)

$= a1$(公理 H5)

$= a$.(公理 H4)

(2) $a + a = (a+a)1$(公理 H4)

$= (a+a)(a+\overline{a})$(公理 H5)

$= a + a\overline{a}$(公理 H3)

$= a + 0$(公理 H5)

$= a$.(公理 H3)

定理 8.7（吸收律）

(1) $a(a+b) = a$；

(2) $a + ab = a$.

证明：(1) $a(a+b) = (a+0)(a+b)$(公理 H3)

$= a + 0b$(公理 H3)

$= a + b0$(公理 H1)

$= a + 0$(定理 8.5(1))

$= a$.(公理 H4)

(2) $a + ab = a1 + ab$(公理 H4)

$= a(1+b)$(公理 H3)

$= a(b+1)$(公理 H1)

$= a1$(定理 8.5(2))

$= a$.(公理 H4)

定理 8.8（狄摩根律）

(1) $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$；

(2) $\overline{a+b} = \overline{a}\,\overline{b}$.

证明：(1) 要证明$\overline{a}+\overline{b}$是$ab$的补元，根据定理 8.3 只需证明

$$ab(\overline{a}+\overline{b}) = 0,$$

$$ab + (\overline{a}+\overline{b}) = 1.$$

先证：$ab(\overline{a}+\overline{b}) = 0$，这是因为

$$ab(\overline{a}+\overline{b}) = (ab)\,\overline{a} + (ab)\,\overline{b}\text{(公理 H3)}$$

$$= (ba)\,\overline{a} + (ab)\,\overline{b}\text{(公理 H1)}$$

$$= b(a\overline{a}) + a(b\overline{b})\text{(公理 H2)}$$

$$= b0 + a0 \text{（公理 H5）}$$
$$= 0 + 0 \text{（定理 8.5(1)）}$$
$$= 0. \text{（公理 H4）}$$

再证：$ab + (\overline{a} + \overline{b}) = 1$，这是因为

$$\begin{aligned} ab + (\overline{a} + \overline{b}) &= (\overline{a} + \overline{b}) + ab \text{（公理 H1）} \\ &= [(\overline{a} + \overline{b}) + a][(\overline{a} + \overline{b}) + b] \text{（公理 H3）} \\ &= [a + (\overline{a} + \overline{b})][\overline{a} + (\overline{b} + b)] \text{（公理 H1、H2）} \\ &= [(a + \overline{a}) + \overline{b}][\overline{a} + (b + \overline{b})] \text{（公理 H1、H2）} \\ &= (1 + \overline{b})(\overline{a} + 1) \text{（公理 H5）} \\ &= (\overline{b} + 1)(\overline{a} + 1) \text{（公理 H1）} \\ &= 1 \cdot 1 \text{（定理 8.5(2)）} \\ &= 1. \text{（公理 H4）} \end{aligned}$$

于是由定理 8.3 得 $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$.

(2) 证明：见下面例 4

定理 8.9（消去律）

(1) $a + \overline{a}b = a + b$；

(2) $a(\overline{a} + b) = ab$.

证明：(1) $a + \overline{a}b = (a + \overline{a})(a + b)$（公理 H3）

$$= 1(a + b) \text{（公理 H4）}$$
$$= a + b. \text{（公理 H5）}$$

(2) $a(\overline{a} + b) = a\overline{a} + ab$（公理 H3）

$$= 0 + ab \text{（公理 H5）}$$
$$= ab. \text{（公理 H3）}$$

以上我们从布尔代数的公理出发，导出了布尔代数的一系列基本性质. 本节中所建立的定理大多是成对出现的，而且这些成对出现的定理均具有特性. 在一个式子中将“+”与“·”对换，将 0 与 1 对换即得另一个式子. 这样成对出现的式子通常称为对偶式. 在布尔代数中，一个式子成立，则其对偶式也一定成立. 这一现象不是偶然的，而是由公理本身决定的. 因为在布尔代数的公理系统中，交换“+”与“·”，交换 0 与 1，仍然得到同一个公理系统，因而由布尔代数的公理系统能够推导出一个式子，则此公理系统必能推出交换“+”与“·”，交换 0 与 1 而得到的另一个对偶式. 这就是通常所说的对偶原理.

§5 布尔多项式与布尔函数

在建立了布尔代数上的“运算”之后，很自然我们下一步要做的是把这三种运算结合起来，也就是构建布尔代数上的“代数”. 然后我们再引入布尔函数的概念，这类函数在开关理论中有着广泛的应用，因此也称开关函数. 下面我们先引入布尔代数 B 上“代数式”的概念.

定义 5.1 把布尔代数 B 上的一些变元以及 0 和 1 用布尔代数 B 上的三个运算合理联结起来的式子，就叫布尔多项式.

例如，$a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c$；$a \cdot (b+c) + (a+b) \cdot c + a \cdot b$ 等等都是布尔多项式，但如，$a + \cdot b$，这不是布尔多项式，它不是合理的联结.

我们规定，两个布尔多项式相等，当且仅当其中变元取任意值时，这两个布尔多项式的值相等. 即我们是从“函数观点”来看待它们的相等，而不管它们形式上是否一样，例如布尔多项式 $a \cdot a$ 和 a 是相等的.

定义 5.2 所谓布尔函数就是在布尔变量 x(或布尔变量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$)与布尔变量 y 之间存在一个对应法则，通过这个对应法则就能由 x 的每个值(或变量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的每组值)确定 y 的唯一值与它对应.

比如 $F = (a+b)c$，$g = ab + \overline{ab}$(其中 $a, b, c \in B$) 均为布尔函数.

值得注意的是与普通函数概念相比，所不同的是每个变量都只能取 0 或 1 两个值，这是与普通数值变量一般能取无限多个值的情况是不相同的. 由于每个布尔变量只能取 1、0 这两个值，因此一元逻辑函数 $f(x)$ 的定义域包含两个值$\{0, 1\}$，二元布尔函数 $f(x_1, x_2)$ 的定义域则包含四个二元值组$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$；三元布尔函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的定义域则包含八个三元值组$\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. 一般地 n 元布尔函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域包含 2^n 个 n 元值组，但是布尔函数的值域均为$\{0, 1\}$.

例 1 已知 $f(a, b) = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$ 是关于变元 a，b 的二元布尔函数，求它的函数值.

解：对应于定义域内的四个值，$(0, 0)$，$(0, 1)$，$(1, 0)$，$(1, 1)$，它的值为

$$f(0, 0) = \overline{0} \cdot 0 + 0 \cdot \overline{0} = 0;$$

$$f(0, 1) = \overline{0} \cdot 1 + 0 \cdot \overline{1} = 1;$$

$$f(1, 0) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1;$$

$$f(1, 1)=\bar{1}\cdot 1+1\cdot \bar{1}=0.$$

设有两个相同变量的布尔函数 $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若对应于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任何一组取值，f_1 和 f_2 的值都相同，则称函数 f_1 和 f_2 相等. 判断两个布尔函数是否相等，通常有两种方法，一种方法是真值表法，即依次列出两个布尔函数的所有输入变量取值组合及其相应函数值；另一种方法是代数法，即看两个布尔函数是否能化简为同一种形式，在下面会有更详细的说明.

§6 布尔函数的标准形式及最简式

为阅读方便，先介绍几个名词.

与项：变量用与运算联结的项，例 $a\cdot b\cdot \bar{c}$.

与或式：用或运算联结与项而生成的表达式. 例 $\bar{a}\cdot b+a\cdot \bar{b}+\bar{c}$.

或项：变量用或运算联结的项. 例 $a+b+c$.

或与式：用与运算联结或项而生成的表达式. 例 $(a+\bar{b})\cdot(\bar{a}+c)\cdot\bar{b}$.

最大项：如果一个具有 n 个变量的函数的"或项"包含全部 n 个变量，每个变量都以原变量或反变量（若 a 是原变量，则 $\bar{a}$ 称为反变量）形式出现，且仅出现一次，则该"或项"被称为最大项. 例如三个变量 a, b, c 共有 $a+b+c$, $\bar{a}+b+c$, $a+\bar{b}+c$, $a+b+\bar{c}$, $\bar{a}+\bar{b}+c$, $\bar{a}+b+\bar{c}$, $a+b+\bar{c}$, $\bar{a}+b+\bar{c}$ 八个最大项.

最小项：如果一个具有 n 个变量的函数的"与项"包含全部 n 个变量，每个变量都以原变量或反变量形式出现，且仅出现一次，则该"与项"被称为最小项. 例如三个变量 a, b, c 共有 $a\cdot b\cdot c$, $\bar{a}\cdot b\cdot c$, $a\cdot b\cdot c$, $a\cdot b\cdot \bar{c}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c$, $\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}$, $a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ 八个最小项.

可以看到，布尔代数中，n 个变量可以有 2^n 个最大项和最小项. 布尔函数表达式的标准形式包括两种. 一是标准"与—或"表达式，即由若干最小项相"或"构成的布尔表达式称为标准"与—或"表达式；二是标准"或—与"表达式，即由若干最大项相"与"构成的布尔表达式称为标准"或—与"表达式.

这样求布尔函数的标准形式也包括以下两种类型：

(1) 求标准"与—或"表达式

第一步：将函数表达式变换成一般"与—或"表达式.

第二步：反复使用 $a\cdot(b+\bar{b})=a$ 将表达式中所有非最小项的"与项"扩展成最小项.

例 2 将布尔函数 $f=(a+b)\cdot(a+c)$ 化为"与—或"的标准型.

解：$f=(a+b)\cdot(a+\bar{c})$

$$=a+b\cdot\bar{c}$$

$$=a\cdot(b+\bar{b})\cdot(c+\bar{c})+(a+\bar{a})\cdot b\cdot\bar{c}$$

$$=a\cdot b\cdot c+a\cdot\bar{b}\cdot c+a\cdot b\cdot\bar{c}+a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+a\cdot b\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c},$$

这样就得到了布尔函数 f 的标准型.

(2) 求标准"或—与"表达式

第一步：将函数表达式转换成一般"或—与"表达式.

第二步：反复利用 $(a+b)\cdot(a+b)=a$ 把表达式中所有非最大项的"或项"扩展成最大项.

例3 将布尔函数 $f=a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c$ 化为"或—与"的标准型.

解：$f=a\cdot b+\bar{a}\cdot c+b\cdot c$

$$=(a+c)\cdot(\bar{a}+b)$$

$$=(a+b+c)\cdot(a+\bar{b}+c)\cdot(\bar{a}+b+c)\cdot(\bar{a}+b+\bar{c}),$$

即得到标准"或—与"表达式.

化简布尔函数，当然希望得到最简单的结果——最简式. 实现某一逻辑功能的电路的复杂性与描述该功能的布尔表达式的复杂性直接相关. 一般说，布尔函数表达式越简单，设计出来的相应逻辑电路也就越简单. 为了降低系统成本、减小复杂度、提高可靠性，必须对布尔函数进行化简. 最简式具备两个条件，即表达式中项的个数最少，并且每个项中变量个数也最少. 这对于两种标准型都适用.

判断两个布尔函数是否相等，通常有两种方法，一种方法是真值表法，即依次列出两个布尔函数的所有输入变量取值组合及其相应函数值.

例4 证明定理 8.8(2)：$\overline{a+b}=\bar{a}\bar{b}$.

证明：我们用列表的方法，直接求出布尔型 $\overline{a+b}$ 与 $\bar{a}\bar{b}$ 在每一点处之值，见表 9.

表 9

a	b	$a+b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\overline{a+b}$	$\bar{a}\bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0

由表中可见布尔型 $a+\bar{b}$ 与 $a\,b$ 在每一点值均相等，因此有 $\overline{a+b}=\bar{a}\bar{b}$.

另一种方法是代数法，即看两个布尔函数是否能化简为同一种形式，主要是应用以下列举的公式来化简布尔函数.

(1) $a+a\cdot b=a$, $a\cdot(a+b)=a$(吸收律)

(2) $a\cdot b+a\cdot\bar{b}=a$, $(a+b)\cdot(a+\bar{b})=a$;

(3) $a+\bar{a}\cdot b=a+b$, $a\cdot(\bar{a}+b)=a\cdot b$;

(4) $a\cdot b+\bar{a}\cdot c+b\cdot c=a\cdot b+\bar{a}\cdot c$.

在这里给出公式(4)的一个证明,其他很容易可以得到.

$$\begin{aligned}a\cdot b+\bar{a}\cdot c+b\cdot c&=a\cdot b+\bar{a}\cdot c+(a+\bar{a})\cdot b\cdot c\\&=a\cdot b+\bar{a}\cdot c+a\cdot b\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot c\\&=(a\cdot b+a\cdot b\cdot c)+(\bar{a}\cdot c+\bar{a}\cdot b\cdot c)\\&=a\cdot b+\bar{a}\cdot c.\end{aligned}$$

实际应用中遇到的逻辑函数往往比较复杂,化简时应灵活使用前面的定理及规则,综合运用各种方法.下面举例说明.

例5 (1) 化简 $f=b\cdot c+d+\bar{d}\cdot(\bar{b}+\bar{c})\cdot(a\cdot d+b\cdot\bar{c})$ 为最简"与—或"表达式.

(2) 化简 $f=(a+b)\cdot(\bar{b}+c)\cdot(a+c+\bar{d})\cdot(a+c)$ 为最简"或—与"表达式.

解:(1)
$$\begin{aligned}f&=b\cdot c+d+\bar{d}\cdot(\bar{b}+\bar{c})\cdot(a\cdot d+b\cdot\bar{c})\\&=b\cdot c+d+(\bar{b}+\bar{c})\cdot(a\cdot d+b\cdot\bar{c})\\&=b\cdot c+d+\overline{b\cdot c}\cdot(a\cdot d+b\cdot\bar{c})\\&=b\cdot c+d+a\cdot d+b\cdot\bar{c}\\&=b+d.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}f&=(a+b)\cdot(\bar{b}+c)\cdot(a+c+\bar{d})\cdot(a+c)\\&=(a+b)\cdot(\bar{b}+c)\cdot(a+c)\\&=(a+b)\cdot(\bar{b}+c).\end{aligned}$$

§7 布尔函数的应用

在本章第1、2节中,我们学习了电路的三种基本联结法,即串联、并联与逆反;以及命题的析取、合取和非命题.本节将讨论串并联开关电路、复合命题与布尔函数的关系,并在此基础上进行相应的化简.

7.1 电路的简化

在前面我们知道每一个开关电路都对应着一个布尔函数,这样我们就可以利用布尔代数的运算性质对其进行化简,根据化简后的布尔函数进行电路的简化,这个化简方法称为公式法.例如下面电路的化简:

该电路的逻辑表达式为 $p+\overline{p}\,\overline{q}+pq$. 为了简化该电路，首先将该表达式利用基本公式进行化简.

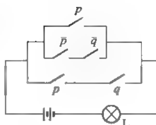


图5

例6 $f=p+\overline{p}\,\overline{q}+pq=(p+\overline{p}\,\overline{q})+pq$

$=(p+\overline{q})+pq$(消去律)

$=(p+pq)+\overline{q}$(公理 H1、H2)

$=p+\overline{q}$.(吸收律)

作 $p+\overline{q}$ 的真值表：

表10

p	q	$\overline{q}$	$p+\overline{q}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

由此可得该电路电流接通的条件有：

$$p=q=0;$$

$$p=1,\ q=0;$$

$$p=q=1.$$

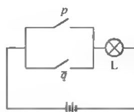


图6

简化后的电路图如图6.

现在我们来回答本章开始时提出的问题：

例7 要设计一个为三人委员会进行秘密表决的机器的电路. 要求信号在二人或三人以上(即按少数服从多数原则进行表决)按下开关，表示同意时亮而其他情况不亮.

解：令 p 表示“第一个成员同意”，q 表示“第二个成员同意”，r 表示“第三个成员同意”，根据题意作出开关函数 $f(p,q,r)$ 的真值表如下：

表11

p	q	r	$f(p,q,r)$	注
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$m_3=\overline{p}qr$

p	q	r	$f(p, q, r)$	注
1	0	0	0	
1	0	1	1	$m_5 = p\bar{q}r$
1	1	0	1	$m_6 = pq\bar{r}$
1	1	1	1	$m_7 = pqr$

由上表即得秘密表决机器的电路的开关函数的表达式：

$$f(p, q, r) = \bar{p}qr + p\bar{q}r + pq\bar{r} + pqr.$$

利用公式法化简可得：

$$\begin{aligned} f(p, q, r) &= \bar{p}qr + p\bar{q}r + pq\bar{r} + pqr \\ &= \bar{p}qr + p\bar{q}r + pq(\bar{r} + r)(\text{公理 H3}) \\ &= \bar{p}qr + p\bar{q}r + pq(\text{公理}) \\ &= \bar{p}qr + p(\bar{q}r + q)(\text{公理 H3}) \\ &= \bar{p}qr + p(q + \bar{q}r)(\text{公理 H1}) \\ &= \bar{p}qr + p(q + r)(\text{消去律}) \\ &= \bar{p}qr + pq + pr(\text{公理 H3}) \\ &= q(p + \bar{p}r) + pr(\text{公理 H3}) \\ &= q(p + r) + pr(\text{消去律}) \end{aligned}$$

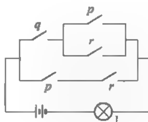


图 7

从而得化简后的电路图 7，通过这两个开关函数的真值表，我们很容易验证这两个电路是等效的.

例 8 在楼房内两层楼梯中间设置一照明灯 L，要求在两层的楼梯口各设置一开关 x 与 y 同时控制此灯. 具体地说，当上楼时拉开关 x 使灯 L 亮，上楼后再拉开关 y 使灯 L 灭. 此后又有人上(下)楼，再拉开关 x(或 y)，灯 L 又亮. 此人通过楼梯后，再拉开关 y(或 x)灯 L 又灭. 试问开关 x 与 y 应如何联结才能实现上述要求.

解：由问题的要求，我们需要设计一个包含两个开关 x 与 y 的开关线路来控制楼梯中的照明灯. 当两个开关 x 与 y 均断开时，灯 L 只可能有两种情况：亮或灭. 我们不妨假设当开关 x 与 y 均断开时灯 L 灭(当开关 x 与 y 均断开时灯 L 亮的情况可类似讨论).

下面我们先求开关线路的布尔函数 $f(x, y)$. 由假设当开关 x 与 y 均断开时灯 L 灭，因此

$$x = y = 0 \text{ 时}, f(x, y) = 0;$$

当有人上楼拉动开关，这时开关 x 变为闭合，开关 y 仍为断开. 按线路的要求这时灯 L 亮，也就是说

$$x = 1 \text{ 而 } y = 0 \text{ 时}, f(x, y) = 1;$$

此人上楼后再拉动开关 y，这时开关 x 与 y 均为闭合. 按线路要求，这时灯 L 灭. 也就是说

$$x = y = 1 \text{ 时}, f(x, y) = 0;$$

以后又有人通过楼梯，若拉开关 x，开关 y 仍为闭合. 若拉开关 y，则开关 x 仍为闭合，而开关 y 断开. 按线路要求这时灯 L 再亮，也就是说

$$x = 0 \text{ 而 } y = 1 \text{ 时}, f(x, y) = 1 \text{ 或}$$

$$x = 1 \text{ 而 } y = 0 \text{ 时}, f(x, y) = 1.$$

由上述可列出开关线路的布尔函数 $f(x, y)$ 的真值表如下：

表 12

x	y	$f(x, y)$	注
0	0	0	
1	0	1	$x\bar{y}$
1	1	0	
0	1	1	$\bar{x}y$

由真值表直接得到布尔函数的布尔表达式：

$$f(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y.$$

由此布尔型直接得到控制灯 L 的开关线路如图 8.

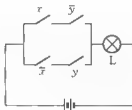


图 8

由此我们看到进行电路设计时，一般有如下步骤：

第一步：由实际问题对线路的需求写出相应的布尔函数的真值表.

第二步：由真值表写出布尔函数.

第三步：由布尔函数继而得出电路的布尔型，并进行化简.

第四步：由布尔型则可设计出相应的开关电路.

例 9 求解布尔方程 $(a+b)(b+\bar{c}) = 1$.

解：左端化为"与—或"范式：$(a+b)(b+c) = b + ac = b(a+a) + a\bar{c}(b+b) = ab + b\bar{a} + a\bar{c}b + a\bar{c}b = ab(c+\bar{c}) + b\bar{a}(c+\bar{c}) + a\bar{c}b + a\bar{c}\bar{b} = abc + ab\bar{c} + abc + abc + abc + abc$，即 $abc + ab\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + ab\bar{c} = 1$.

由“或”运算的意义知：$abc = 1$, $ab\bar{c} = 1$, $\bar{a}bc = 1$, $\overline{ab}\,\bar{c} = 1$, $ab\bar{c} = 1$, $ab\bar{c} = 1$, $abc = 1$，由“与”运算意义，就必须 $a = 1$, $b = 1$ 和 $c = 1$，于是得到方程的一个解 $a = b = c = 1$，即 111. 类似地其余四个的解分别是：110, 011, 010, 100. 于是原方程解集为{111, 110, 011, 010, 100}.

我们以命题代数为例，说明布尔函数在现实生活中的应用. 在命题代数中，除了三种基本逻辑运算外，与命题逻辑相对应，还有两种运算：蕴含(→)和等值运算(←→). 对于命题 p 与 q，“若 p 则 q”称为条件命题，记作 $p \to q$. 条件命题的真值表见表 13.

由下述真值表可以发现：在条件命题 $p \to q$ 中，如果条件 p 为假，那么 $p \to q$ 恒为真；如果条件 p 为真，那么 $p \to q$ 的真假决定结论 q 的真假. 由真值表检验可以发现：$p \to q = \neg p \vee q$.

对于命题 p 和 q，当且仅当命题 p 和 q 真值相等时，称为等值(即 p 与 q 同真假)，记为 $p \leftrightarrow q$. 其真值表见表 14.

表 13

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表 14

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

五种复合命题真值表汇总见表 15.

表 15

p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
		0	1	0	1	1	0
		0	0	0	0	1	1

有了上述的准备，我们就可以来完成一些逻辑问题.

例 10 有一仓库被盗，公安人员经侦查，怀疑甲、乙、丙和丁四人作案，又经细查，知道这四人中只有两人作案，在盗窃案发生的那段时间，可靠的线索有：甲、乙两人中有且只有一个人去过仓库；乙和丁不会同时去仓库；丙若去仓库，丁必一同去；丁若没去仓库，则甲也没去，判断四人中哪两人去仓库作案.

解：对于“哪两个人作案”问题，设 a，b，c，d 分别表示甲，乙，丙，丁去仓库作案，据题意：$ab+\bar{a}b=1$；$bd=0$，$b+\bar{d}=1$；$c\to d=1$，即$\bar{c}+d=1$；$\bar{d}\to a=1$，即 $d+\bar{a}=1$；于是可得逻辑方程：$(a\bar{b}+\bar{a}b)(\bar{b}+\bar{d})(\bar{c}+d)(d+\bar{a})=1$，左边化简为“与 或”式：即 $a\bar{b}d+\bar{a}b\bar{c}d=1$；范式为：$abcd+ab\bar{c}d+\bar{a}b\bar{c}d=1$，从而有三个解：$a\bar{b}cd=1$；$a\bar{b}\bar{c}d=1$；$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}=1$. 如用命题的真假符号“1”、“0”表示就是 1011，1001，0100，但由题意只有两人作案. 显然解是 1001，即作案者为甲和丁.

本章思考题

1. 什么是代数运算？举一个正例，再举一个反例.
2. 什么是代数系统？举两个例子说明.
3. 证明：$ab+\bar{a}c+\bar{b}c=ab+c$.
4. 证明：$(ab+ac)\,\overline{a(b+c)}=0$.
5. 化简布尔函数 $f=\overline{ab}+b\bar{c}+\bar{a}c+\bar{a}\bar{c}d$.
6. 设集合 $M=\{x\mid x>2\}$，$P=\{x\mid x<3\}$，那么“$x\in M$ 或 $x\in P$”是“$x\in P\cap M$”的什么条件？
7. 设 $x\in\mathbf{R}$，则 $x^4>16$ 的一个充分必要条件是（　　）.
   A. $x^2>2$　　B. $x^2>4$　　C. $x^3>16$　　D. $x^3>8$
8. 某公司有赵、钱、孙、李、周五位管理人员，现要派其中一些人出国考察，但由于工作及其他条件的限制，这次选派必须满足如下一些条件：
   (1) 若赵去，则钱也去；
   (2) 李、周两人中必有人去；
   (3) 钱、孙两人中去一人也只能去一人；
   (4) 孙、李两人要么都去，要么都不去；
   (5) 若周去，则赵、钱都去.
   问应如何选派？

本章参考文献

[1] R. L. 吉德斯坦因. 布尔代数[M]. 科学出版社，1974.
[2] 王宪钧. 数理逻辑引论[M]. 北京大学出版社，1998.
[3] 马振华. 数学逻辑引论[M]. 清华大学出版社，1982.
[4] 吕家俊，朱月秋，孙耕田. 布尔代数[M]. 山东教育出版社，1982.

第九章　矩阵与变换

在线性代数中我们已经知道，方程组不仅与矩阵、行列式，而且与向量空间都有非常重要的关系，这三个概念从不同的侧面回答了方程组的不同的问题. 矩阵理论给出线性方程组有解的判别条件；行列式理论给出克莱姆法则，即给出有解的线性方程组求解公式；向量空间理论给出线性方程组解的几何性质. 另外，矩阵还可以刻画变换，本章重点研究矩阵与变换的关系.

§1　矩阵的概念

假如我们把本市的天气分为三种状态：晴、阴与下雨. 若今天晴，则明天晴的概率为$\frac{3}{4}$，阴的概率为$\frac{1}{8}$，下雨的概率为$\frac{1}{8}$；若今天阴，则明天晴的概率为$\frac{1}{2}$，阴的概率为$\frac{1}{4}$，下雨的概率为$\frac{1}{4}$；若今天下雨，则明天晴的概率为$\frac{1}{4}$，阴的概率为$\frac{1}{2}$，下雨的概率为$\frac{1}{4}$. 请用一张表把上述数据清晰地表达出来.

明天 \ 今天	晴	阴	雨
晴	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
阴	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
雨	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

北京、天津、上海和重庆四个城市之间的距离（单位：千米）如下表所示：

	北京	天津	上海	重庆
北京	0	137	1463	2087
天津	137	0	1326	2230
上海	1463	1326	0	2516
重庆	2087	2230	2516	0

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 137 & 1463 & 2087 \\ 137 & 0 & 1326 & 2230 \\ 1463 & 1326 & 0 & 2516 \\ 2087 & 2230 & 2516 & 0 \end{pmatrix}$$

从上面我们可以发现，现实生活中的一些数据需要用列表(二维表)的方式表示出来，这样有一些关系比如今天天气与明天天气的关系，上海与其他城市之间的距离关系等就会比较清楚，便于查询、计算和管理. 为此有必要对他们进行深入的研究，下面我们从定义、运算和应用三个层面进行系统研究.

像上述问题我们把批量数据按照纵横有序的方式记录，将它们排列成方阵或长方阵，此时称这些长方阵为矩阵. 这是用朴素语言进行描述的矩阵定义，当然也有如下更数学化的定义：

定义 9.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}，排成的 m 行 n 列的阵式

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称 A 为 m 行 n 列的矩阵，或 $m\times n$ 矩阵，简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 表示元素 a 在矩阵 A 中处于第 i 行第 j 列. 比如上面 $b_{34}=2516$ 表示第三个城市(上海)到第四个城市(重庆)之间的距离为 2516 千米. 当行数和列数相等时，称为 n 阶方阵.

比如上面天气关系的矩阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 是 3 阶方阵；

m 行 n 列的矩阵的阶是 $m\times n$，比如矩阵 $C=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 的阶是 $2\times 3=6$.

根据定义 n 维向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 1 行 n 列的特殊的矩阵，n 维向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 是 n 行 1 列的矩阵. 反过来，一个 $m\times n$ 的矩阵，可认为是一个含 n 个(维数为 m 的)列向量的集合，或是一个含 m 个(维数为 n 的)行向量的集合. 比如矩阵 B 是有 4 个行向量构成的，分别表示某一个城市到四个城市之间的距离；矩阵 A 有 3 个列向量构成的，分别表示明天三种天气的概率.

§2 矩阵的运算

矩阵与普通的数一样也可以进行运算，如何进行则需要一种表示矩阵运算的数学语言——矩阵代数. 在本节中我们重点关注矩阵的乘法运算，而乘法的基础是加法.

2.1 矩阵的加(减)法

矩阵代数中最简单的运算是加法，它通过把各个矩阵对应分量相加来实现. 比如我们记录 4 名学生 A、B、C、D 和他们所学的三门课程(语、数、外)的考试成绩，每个学生每门课程有平时测验、期中和期末三次成绩，以 10 分制计. 我们以学生姓名为行，课程为列，则分别构成一个考试成绩矩阵，分别为 T_1，T_2 和 T_3，其中 T_1 表示平时成绩，T_2 表示期中成绩，T_3 表示期末成绩.

$$T_1=\begin{pmatrix}6&8&9\\8&5&8\\8&7&8\\4&6&7\end{pmatrix},\ T_2=\begin{pmatrix}3&9&8\\6&7&9\\7&8&8\\5&6&7\end{pmatrix},\ T_3=\begin{pmatrix}6&7&9\\8&6&9\\8&7&8\\6&5&6\end{pmatrix}.$$

我们要得出每位学生每门课程的总成绩 T，可通过矩阵代数表达式 $T=T_1+T_2+T_3$ 给出. 把 T_1，T_2 和 T_3 对应分量相加便得到矩阵 T：

$$T=T_1+T_2+T_3=\begin{pmatrix}6&8&9\\8&5&8\\8&7&8\\4&6&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&9&8\\6&7&9\\7&8&8\\5&6&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&7&9\\8&6&9\\8&7&8\\6&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&24&26\\22&18&26\\23&22&24\\15&17&20\end{pmatrix}.$$

定义 5.2 一般设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A+B=(a_{ij})_{m\times n}+$

$(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$(类似地 $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$).

值得注意的是,定义是将矩阵中各对应位置的元素相加(减),因此矩阵加法仅对同样规格的矩阵才能实施加法运算,不同规格的矩阵相加是无意义的. 易证矩阵的加法满足交换律和结合律,即

如果 A, B, C 是同阶的矩阵,那么有

(1) $A+B=B+A$;(加法交换律)

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$. (加法结合律)

根据上例中的条件,如果要问四位学生期末与期中相比,成绩是提高了还是下降了,那么只要将 T_3 与 T_2 做一下减法运算即可,

$$T=T_3-T_2=\begin{pmatrix}6&7&9\\8&6&9\\8&7&8\\6&5&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&9&8\\6&7&9\\7&8&8\\5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-1&0\\1&-1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

2.2 矩阵的乘法

2.2.1 矩阵的数乘

定义 9.3 矩阵代数中,一个单个的数称为数量或标量.

定义 9.4 一个向量或一个矩阵与一个数量 k 相乘,称为数乘. $B=kA=(ka_{ij})$,即 k 与矩阵 A 中的各元素相乘. 矩阵 B 叫做实数 k 与矩阵 A 的数乘.

比如对上面四位学生三门课程的综合成绩评定:据测验的重要性,一般可设平时测验占总分的 15%,期中考试占 25%,期末考试占 60%,则 $W=15\%T_1+25\%T_2+60\%T_3$,即

$$W=15\%\begin{pmatrix}6&8&9\\8&5&8\\8&7&8\\4&6&7\end{pmatrix}+25\%\begin{pmatrix}3&9&8\\6&7&9\\7&8&8\\5&6&7\end{pmatrix}+60\%\begin{pmatrix}6&7&9\\8&6&9\\8&7&8\\6&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.25&7.65&8.75\\7.5&6.1&8.85\\7.75&7.25&8\\5.45&5.4&6.4\end{pmatrix}$$

可以验证矩阵与数乘满足以下性质:

如果 A, B 是同阶的矩阵,r, s 是任意实数,那么有

(1) $r(A+B)=rA+rB$;(数乘对矩阵加法的分配律)

(2) $(r+s)A=rA+sA$;(数乘对实数加法的分配律)

(3) $(rs)A=r(sA)$. (数乘的结合律)

2.2.2 矩阵的乘法(变换的复合)

我们或许会想,矩阵的乘法是不是对应元素相乘? 不是,这样定义的乘法没有

用途. 我们要求两个相乘的矩阵具有这样的性质：第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数.

定义 9.5 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，则 $C=AB=(c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},$$

即 C 的第 i 行第 j 列元素是 A 的第 i 行向量与 B 第 j 列向量的数量积. 我们把矩阵 C 叫做矩阵 A 与矩阵 B 的乘积，记作 $AB=C$.

值得注意的是：根据矩阵乘法的定义，只有当左边的矩阵 A 的列数与右边的矩阵 B 的行数相等时，它们的乘法 AB 才能进行.

例 1 设在一家商店里，柑橘每个 0.3 元，苹果每个 0.5 元，香蕉每个 0.4 元. 小丽要 3 个柑橘、2 个苹果和 4 个香蕉，问小丽购水果的支出是多少?

解：据题意三种水果的价格用向量表示为：$\boldsymbol{p}=(0.30, 0.50, 0.40)$，小丽对这三种水果的需求用向量表示为：$\boldsymbol{a}=(3, 2, 4)$，则小丽购水果的支出为：

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}=(0.30, 0.50, 0.40)\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=3.5.$$

例 2 一家水果店出售 5 种水果，它们的单价和利润如表 1 所示：

表 1

品种	西瓜	哈密瓜	水蜜桃	葡萄	草莓
单价(元/千克)	3.00	6.50	4.50	5.00	8.00
利润(元/千克)	0.50	1.50	1.00	1.20	1.30

每笔生意的购买量如表 2 所示：

表 2

品种	西瓜	哈密瓜	水蜜桃	葡萄	草莓
顾客甲	10	5	8.5	3	2
顾客乙	0	15	5	2.5	5
顾客丙	15	10	10	8	7.5

试计算每笔生意的营业额和利润.

解：设购买量矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}10 & 5 & 8.5 & 3 & 2\\ 0 & 15 & 5 & 2.5 & 5\\ 15 & 10 & 10 & 8 & 7.5\end{bmatrix},$$

单价向量和利润向量构成的矩阵

$$B=\begin{bmatrix}3.00 & 0.50\\ 6.50 & 1.50\\ 4.50 & 1.00\\ 5.00 & 1.20\\ 8.00 & 1.30\end{bmatrix}.$$

于是

$$C=AB=\begin{bmatrix}10 & 5 & 8.5 & 3 & 2\\ 0 & 15 & 5 & 2.5 & 5\\ 15 & 10 & 10 & 8 & 7.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3.00 & 0.50\\ 6.50 & 1.50\\ 4.50 & 1.00\\ 5.00 & 1.20\\ 8.00 & 1.30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}131.75 & 27.20\\ 172.50 & 37.00\\ 255.00 & 51.85\end{bmatrix}.$$

例3 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，求 AB.

解：$AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & 29\end{pmatrix}$.

我们顺带计算一下 BA，发现 $BA=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 11\\ 11 & 11\end{pmatrix}\neq AB$，这个例子告诉我们矩阵的乘法一般不满足交换律.

例4 已知 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$，求 AB、AC.

解：$AB=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；$AC=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

从这里我们看到虽然 $A\neq 0$，$B\neq 0$，$C\neq 0$，但 AB 可能为 0 矩阵，这是矩阵与普通数的区别之一，即矩阵不能像普通实数一样具备消去律.

矩阵的乘法是一种较为复杂的运算，普通数的乘法性质，不全部适用于矩阵乘法，虽然大部分有效，但有一部分比如上面所介绍的则不再有效. 设 A，B，C 为矩阵，一般而言，对矩阵的乘法运算具有下列性质：

(1) $(AB)C=A(BC)$；（结合律）

(2) $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$.（乘法对加法的分配律）

2.2.3 三种运算之间的关系

矩阵的加法、乘法和数乘满足以下性质：

如果 A, B, C 是使下列运算有意义的矩阵，r 是任意实数，那么有

(1) $A(B+C)=AB+AC$;（矩阵乘法对加法的(左)分配律）

(2) $(B+C)A=BA+CA$;（矩阵乘法对加法的(右)分配律）

(3) $r(AB)=(rA)B=A(rB)$;（矩阵乘法对数乘的结合律）

(4) $(AB)C=A(BC)$.（矩阵乘法的结合律）

在进行矩阵的加法和乘法的混合运算时，也像实数的四则运算一样，在没有括号时，默认先乘后加的运算次序.

2.3 矩阵的逆

[illegible] 主对角线上的元素均为 1，其余为 0 的方阵称为单位阵，用字母 I 表示.

比如，

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

分别是 2 阶单位阵，3 阶单位阵和 4 阶单位阵.

设 A 为 3 阶矩阵，I 为 3 阶单位矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$AI=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=A,$$

$$IA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=A.$$

一般地，A 为任意的矩阵，I 为单位矩阵，则 $AI = IA = A$，单位矩阵 I 相当于实数乘法中的"1". 从上面的讨论可知，在适当的限制下，矩阵可以进行加减和乘法运算，而不引进除法运算，但是对某一类矩阵，乘法的逆运算是可能的，这是除法的等价物.

定义 9.7 对于一个 n 阶方阵 A，如果存在一个 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = I$，则称矩阵 B 为矩阵 A 的逆矩阵，记为 $A^{-1} = B$（或 $B^{-1} = A$）.

值得注意的是 A、B 互为逆矩阵. 逆矩阵的概念相当于实数乘法运算中倒数的概念：如 $0.8 \times 1.25 = 1$，因此可将 1.25 和 0.8 互相看作关于乘法运算的"逆"元素.

比如 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

定理 9.1 若一个矩阵 A 存在逆矩阵 A^{-1}，则这个逆矩阵唯一.

证明：若还存在一个逆矩阵使得 $QA = AQ = I$ 成立，则 $QAA^{-1} = Q(AA^{-1}) = QI = Q$，$QAA^{-1} = (QA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$，得到 $Q = A^{-1}$.

是否任意的矩阵都存在逆矩阵？回答是否定的，比如 $C = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$，则 C 不可能有逆矩阵. 事实上，C 与任何 2 阶矩阵 D 的乘积 CD，其第一行元素全是零，即 $CD \neq I$，因此 C 的逆矩阵不存在.

定理 9.2 方阵 A 可逆的充要条件是 A 为非退化方阵（即 $|A| \neq 0$），而且当 A 可逆时，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*,$$

其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

如果 A 是二阶方阵，$A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$，记 $|A| = ad - bc (\neq 0)$，则可推得 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$.

一般地，n 阶方阵的伴随矩阵为

$$A^* = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

每一个 A_{ij} 的符号取决于 $(-1)^{i+j}$.

例5 求 $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：$A^{-1} = \begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}$.

求两个矩阵 A、B（B 可逆）的除法就相当于求 A 乘 B^{-1}.

例6 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}$，求 $A \div B$.

解：因为 $|B| = \begin{vmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{vmatrix} = 6-4 = 2 \neq 0$，故矩阵 B 存在逆阵

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}2 & -1\\-4 & 3\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\-2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

则 $A \div B = AB^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\-2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\-5 & \frac{9}{2}\end{bmatrix}$.

§3 矩阵与变换

矩阵 $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ 可以理解为线性方程组 $\begin{cases}x_1 + 2x_2 = b_1,\\2x_1 + x_2 = b_2\end{cases}$ 的系数矩阵. 换个角度看，若把 x_1，x_2 看成是已知，则这一组方程可以用来确定 b_1，b_2 这两个数，即可以用这一对方程去定义一个变换 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$，这个变换由表达式 $f(x_1, x_2) = (b_1, b_2)$ 或 $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2)$ 所确定. 这个变换称为由矩阵 A 所确定的线性变换.

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix},$$

$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，这里 $f \quad A \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$.

定义 [illegible] 如果把列向量 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 看作点 P 的坐标 (x_1, x_2)，把列向量 $\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}$ 看作

点 P' 的坐标(x_1', x_2')，那么矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$确定了一种坐标的变换 f：$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$也确定了一种点的变换 $P \to P'$，称点 P' 是点 P 在变换 A 下的像.

因此矩阵既可以看成是若干个数依一定的行列次序排列而成的一种数表结构，也可以看成是一种特殊的变换，而我们上面提到的矩阵乘法则相当于变换的一种复合. 另外我们在第七章中对称与群中，提到有三种运动，其实可以将它们看作是一种特殊的变换，即保持图形中任意两点距离不变的变换，这些变换也可以用矩阵来刻画. 下面我们以二阶矩阵为例，探讨矩阵及其表示的变换和平面向量的乘法.

3.1 变换与变换矩阵

3.1.1 恒等变换

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$，这一变换由 $f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+0x_2 \\ 0x_1+x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 给出. 此矩阵 A 所表示的几何意义是把 $\mathbf{R}^2$ 中的每一个向量映射成自身. 这样的矩阵(即单位矩阵)所表示的变换为恒等变换.

3.1.2 反射变换

(1) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$，$f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+0x_2 \\ 0x_1-x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$，此矩阵 A 的几何意义是把 $\mathbf{R}^2$ 中的每一个向量变成它关于 x 轴对称的向量，如图 1.

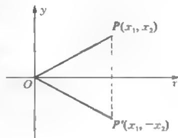


图 1

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$，$f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_1+0x_2 \\ 0x_1+x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，此矩阵 A 的几何意义是把 $\mathbf{R}^2$

中的每一个向量变成它关于 y 轴对称的向量,如图 2.

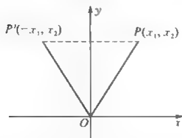


图 2

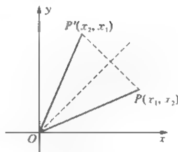


图 3

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0x_1+x_2\\x_1+0x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}$,此矩阵 A 的几何意义为把 $\mathbf{R}^2$ 中的每一个向量变成它关于直线 $y=x$ 对称的向量,如图 3.

3.1.3 伸缩变换

设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$,由 $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+0x_2\\0x_1+\frac{1}{2}x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\frac{1}{2}x_2\end{pmatrix}$ 给出,此矩阵 A 的几何意义是把 $\mathbf{R}^2$ 中的每一个向量沿 y 轴方向垂直压缩为原来的 $\frac{1}{2}$. 若 $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ 表示沿 x 轴方向拉伸 2 倍. 一般的伸缩变换可用 $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$($|a|$ 或 $|b|$ 大于 1,则表示拉伸;小于 1 则表示压缩)来表示,其中 $ab\neq 0$. 如图 4.

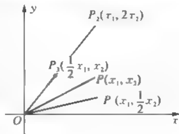


图 4

3.1.4 水平推移变换

设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$,则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=$

$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\0x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\x_2\end{pmatrix}$,这里是将纵坐标乘以 2 加到横坐标上.得到 $x_1'=x_1+2x_2$.

3.1.5 旋转变换

设 $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$,则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$,

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\\\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2\end{pmatrix}$$,此矩阵 A 的几何意义是把 $\mathbf{R}^2$ 中的每一个点(x,y)绕原点逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$,如图 5.

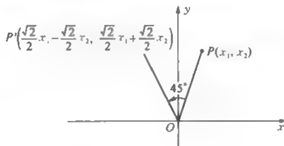


图 5

一般地,若旋转任意角 θ,则 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

3.1.6 切变变换

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$,则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\0x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2\end{pmatrix}$,如图 6.

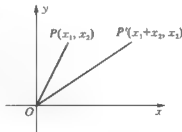


图 6

一般地，把$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$这类矩阵所表示的变换称为切变变换. 切变是一种坐标系“扭曲”变换，非均匀地拉伸它. 切变时角度会发生变化，但面积和体积都保持不变.

3.1.7 投影变换

设$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则由矩阵 A 所确定的线性变换为 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+0x_2\\0x_1+0x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix}$，此矩阵 A 的几何意义把 $\mathbf{R}^2$ 中的每一个点$(x,\ y)$变成 x 轴上的一个点$(x,\ 0)$，如图 7.

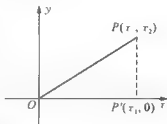


图 7

一般地，把$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$这类矩阵所表示的变换称为投影变换. 投影变换将所有点都被拉平至垂直的轴.

反射变换、伸缩变换、切变变换等是最基本的几何变换，通常称为初等变换. 当 $k\neq 0$ 时，表示这些变换的矩阵$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}k&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$等称为初等变换矩阵.

3.2 点、直线、图象

3.2.1 坐标变换与点变换

例 7 (1) 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$P(1,\ 1)$，$Q(0,\ 0.5)$，求 P、Q 在变换 A 下的像.

(2) 设$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$P(1,\ 1)$，$Q(0,\ 0.5)$，求 P、Q 在变换 B 下的像.

解：(1) 因为$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$，所以 $P'(2,\ 1)$，$Q'(0.5,\ 0.5)$.

(2) 因为$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix}$，所以 $P'(1,\ 2)$，$Q'(0,\ 0.5)$.

3.2.2 直线的变换

(1) 对于直线 PQ，如果 X 是 PQ 上的点(非 Q)，那么存在实数 λ，使 $\overrightarrow{PX}=$

$\lambda\overrightarrow{XQ}$，即 $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}=\lambda(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OX})$，解得

$$\overrightarrow{OX}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{OQ}).$$

设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，$X(x,\ y)$，则有

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{1+\lambda}\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right],$$

这就是点 X 在 PQ 上的充要条件(除了 X、Q 重合).

(2) 对 P，Q，X 的坐标作变换，设变换矩阵 A，

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2'\\y_2'\end{pmatrix},$$

即 X，P，Q 的像 $X'(x',\ y')$，$P'(x_1',\ y_1')$，$Q'(x_2',\ y_2')$.

根据矩阵的运算律

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=A\left\{\frac{1}{1+\lambda}\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]\right\}=\frac{1}{1+\lambda}A\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]\\&=\frac{1}{1+\lambda}\left\{A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\lambda\left[A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]\right\}=\frac{1}{1+\lambda}\left[\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_2'\\y_2'\end{pmatrix}\right],\end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{1+\lambda}\left[\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_2'\\y_2'\end{pmatrix}\right],$$

于是得到：若 X、P、Q 共线，则 $X'(x',\ y')$，$P'(x_1',\ y_1')$，$Q'(x_2',\ y_2')$共线，且保持比例.

3.2.3 图形变换(直线型图形的变换)

所谓图形变换就是图形上的点都作同一变换. 图形是由点组成的，而平面上任何点 P 都与坐标$(x,\ y)$一一对应. 如果将图形上点的坐标改变，那么图形的形状、大小和位置也会发生相应的改变. 下面我们分别由变换矩阵使得图形变换，再由图形变换找到相应的变换矩阵两个角度来看变化的具体过程.

1. 从变换矩阵到图形变换

例 8 已知图形是一面三角旗，旗上的几个关键点的坐标分别是 $A(2,\ 1)$，$B(4,\ 1.5)$，$C(6,\ 2)$和 $D(4.5,\ -0.5)$，如图 8. 试问在下列各变换矩阵的作用下，点 A，B，C，D 坐标各变成什么?

(1) $A_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$; (2) $A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

(3) $A_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$;

(4) $A_4=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$;

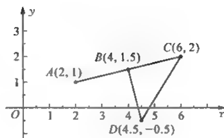


图 8

(5) $A_5=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}$; (6) $A_6=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$; (7) $A_7=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

解：(1) 因为变换矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，故变换后 A, B, C, D 的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4.5\\-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}A(2,1)&\rightarrow A'(4,2),\\ B(4,1.5)&\rightarrow B'(8,3),\\ C(6,2)&\rightarrow C'(12,4),\\ D(4.5,-0.5)&\rightarrow D'(9,-1).\end{aligned}$$

变换后所得到的图形与原小三角旗的形状、方向相同，但尺寸不同，如图 9.

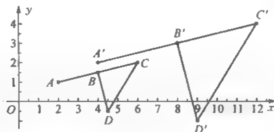


图 9

可将上述四个矩阵乘法可以合并成一个：

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\1&1.5&2&-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8&12&9\\2&3&4&-1\end{pmatrix}.$$ 下面类似.

(2) 因为变换矩阵 $A_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 A，B，C，D 变换后的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\1&1.5&2&0.5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-2&-4&-6&-4.5\\1&1.5&2&-0.5\end{pmatrix}.$$

所对应的图形与原图形关于 y 轴对称，如图 10.

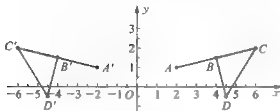


图 10

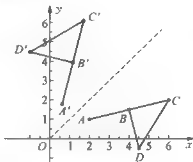


图 11

(3) 因为变换矩阵为 $A_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，故变换后 A，B，C，D 坐标分别为

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\1&1.5&2&-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1.5&2&-0.5\\2&4&6&4.5\end{pmatrix}.$$

所对应的图形与原图形关于 $y=x$ 轴对称，如图 11.

(4) 因为变换矩阵 $A_4=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，

故变换后 A，B，C，D 的坐标分别为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\1&1.5&2&-0.5\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&2.5&4&5\\3&5.5&8&4\end{pmatrix}.$$

(5) 因为变换矩阵 $A_5\ \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，故变换后 A，B，C，D 的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\1&1.5&2&-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1.5&-2&0.5\\2&4&6&4.5\end{pmatrix}.$$

(4)和(5)对应的图形是将原图形绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 而得，如图 12.

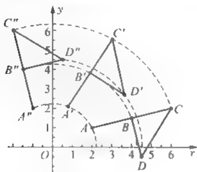


图 12

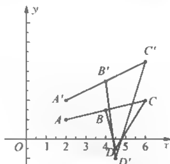


图 13

(6) 因为变换矩阵为 $A_6=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，故变换后 A，B，C，D 的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\1&1.5&2&-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\2&3&4&1\end{pmatrix}.$$

对应的图形如图 13 所示，这种变换在一定程度上改变了图形的形状(如长度、夹角)，但也保留了图形的某些性质(如连结关系等).

(7) 因为变换矩阵为 $A_7=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，故变换后 A，B，C，D 的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\1&1.5&2&-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6&4.5\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的图形是将原图形上的各点投影到 x 轴上，如图 14.

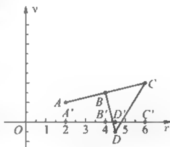
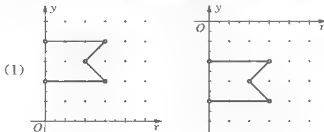


图 14

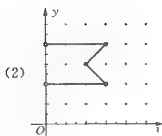
2. 从图形变换到变换矩阵

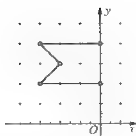
例 9 请分别求出下列这些图形变换所对应的变换矩阵：

(1)

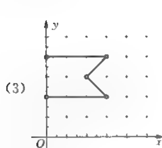


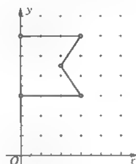
(2)



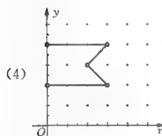


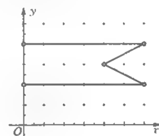
(3)



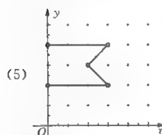


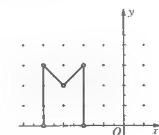
(4)



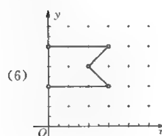


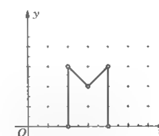
(5)



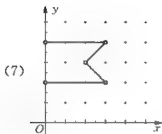


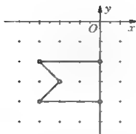
(6)



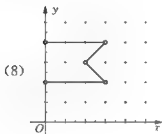


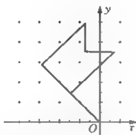
(7)



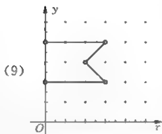


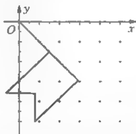
(8)





(9)





解：(1) 因为左右两个图是关于 x 轴对称，所以所对应的变换矩阵为

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(2) 因为左右两个图是关于 y 轴对称，所以所对应的变换矩阵为

$$A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(3) 因为右图是左图往上拉后得到的，所以所对应的变换矩阵为

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.5\end{pmatrix}.$$

(4) 因为右图是左图往右拉后得到的，所以所对应的变换矩阵为

$$A_4=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(5) 因为右图是左图逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$后得到的，所以所对应的变换矩阵为

$$A_5 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) 因为右图是左图关于 $y = x$ 对称后得到的，所以所对应的变换矩阵为

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) 因为右图是左图绕原点逆时针旋转 π 后得到的，所以所对应的变换矩阵为

$$A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(8) 因为右图是左图绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$后得到的，所以所对应的变换矩阵

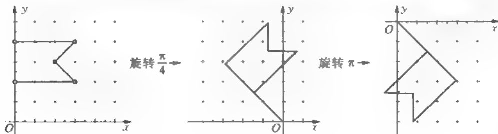
$$A_8 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9) 因为右图是左图绕原点顺时针旋转$\frac{3\pi}{4}$后得到的，所以所对应的变换矩阵为

$$A_8 = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 变换的合成与矩阵的乘法

例 10 上述例 9 的(9)中的右图可既可以看成是左图绕原点顺时针旋转$\frac{3\pi}{4}$后得到，又可以看成先绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$，再绕原点逆时针旋转 π 后得到的.



后一种看法其实就是两个变换的合成,反应在矩阵上就是两个矩阵相乘,即

$$\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

一般地,若图形 $T\xrightarrow{A}$图形 T';图形 $T'\xrightarrow{B}$图形 T'',则图形 $T\xrightarrow{BA}$图形 T''.

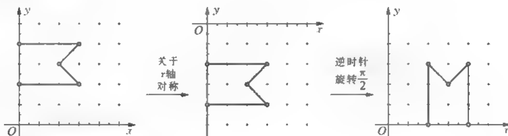
$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

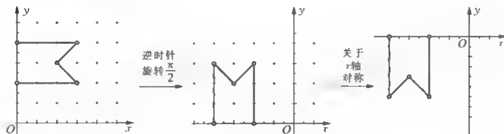
$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

值得注意的是,在例 10 中,变换 A、B 交换次序后的结果是相同的,但在一般的情况下并不如此.图形变换的合成结果与次序有关,也说明了矩阵乘法不满足交换律.

例如



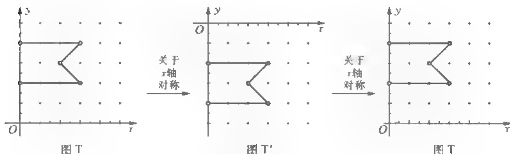
改变变换的次序



(4) 逆变换与逆矩阵

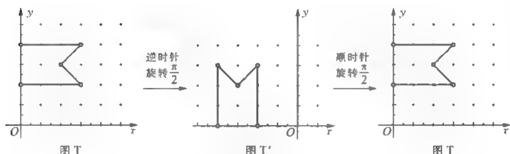
若图形 T 在矩阵 A 的作用下变为图形 T'，图形 T' 在矩阵 B 的作用下又变回到图形 T，则变换 B 叫做变换 A 的逆变换，即图形 $T \xrightarrow{A}$ 图形 T'；图形 $T' \xrightarrow{B}$ 图形 T. 比如下面的各图我们知道存在逆变换与存在逆矩阵是等价的.

(1)



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然，$AB = BA = I_2$.

§4 矩阵的应用

4.1 Markov 链

4.1.1 天气的 Markov 链

假设我们把本市的天气分为三种状态：晴、阴和下雨. 若今天天阴，则明天晴天

的概率为$\frac{1}{2}$，阴的概率为$\frac{1}{4}$，下雨的概率为$\frac{1}{4}$. 如果今天天晴，或今天下雨，则明天天气会出现另外的概率. 这些概率可以通过观察本市以往几年每天天气的变化趋势来确定.

明天 \ 今天	晴	阴	雨
晴	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
阴	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
雨	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

这是用概率方法预测天气的一种简化形式. 矩阵 A 中的概率称为转移概率，矩阵 A 称为转移矩阵. 它的 -列对应今天天气的状态，它的每一行对应明天的天气，如 $a_{23}=\frac{1}{2}$，表示今天下雨明天转阴的概率. 以当前状态来预测下一段时间不同状态的概率模型，称为 Markov 链(马尔科夫，1856—1922). 对于一个 Markov 链来说，转移矩阵的每一列的概率之和必定为 1.

已知今天天晴、是阴或是雨的概率，就可以用转移矩阵 A 提供的数据来计算明天是晴、是阴还是雨的概率. 设 p_1，p_2，p_3 分别为今天是晴、是阴、是雨的概率，设 p_1'，p_2'，p_3'分别为明天是晴、是阴、是雨的概率. 利用 Markov 链，可计算明天天气概率为

$$\begin{pmatrix}p_1'\\ p_2'\\ p_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}.$$

如果在清晨我们听到天气预报为，今天为阴或为雨的概率为$\frac{1}{2}$，那么 $p_1=0$，$p_2=\frac{1}{2}$，$p_3=\frac{1}{2}$. 利用今天天气的这些概率，再用 Markow 链，就可预测明天天气的概率，

$$P_2=\begin{pmatrix}p_1'\\ p_2'\\ p_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix};$$

$$P_3=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{32}\\\frac{17}{64}\\\frac{13}{64}\end{pmatrix},$$

$$P_4=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{17}{32}\\\frac{17}{64}\\\frac{13}{64}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{149}{256}\\\frac{15}{64}\\\frac{47}{256}\end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{149}{256}\\\frac{15}{64}\\\frac{47}{256}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{307}{512}\\\frac{451}{2048}\\\frac{363}{2048}\end{pmatrix},$$

$$\cdots$$

$$P_{100}=\begin{pmatrix}\frac{14}{23}\\\frac{5}{23}\\\frac{4}{23}\end{pmatrix}.$$

通过计算得到 100 天后，晴、阴、雨的概率分别为$\frac{14}{23}$, $\frac{5}{23}$, $\frac{4}{23}$，并且以后也是稳定在这个概率，下面对此结论进行证明.

证明：$P_2=AP_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\\frac{3}{8}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ 类似地，有

$$P_3=AP_2=\begin{pmatrix}\frac{17}{32}\\\frac{17}{64}\\\frac{13}{64}\end{pmatrix},$$

$$P_4 = AP_3 = \begin{pmatrix} \frac{149}{256} \\ \frac{60}{256} \\ \frac{47}{256} \end{pmatrix},$$

…

是否存在一个稳定的极限，使得 $P_1, P_2, \cdots, \to L=(l_1, l_2, l_3)$？若这个极限存在，则用此来刻划天气转移的速度. 现假设该极限存在，设为 L，则 $L = LA$，$L - LA = 0$，$L(I-A)=0$，

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即 $\begin{cases} \frac{1}{4}l_1 - \frac{1}{2}l_2 - \frac{1}{4}l_3 = 0, \\ \frac{1}{2}l_2 - \frac{5}{8}l_3 = 0. \end{cases}$

解得 $l_2=\frac{5}{4}l_3$，$l_1=\frac{7}{2}l_3$，因为概率之和为 1，即 $l_1+l_2+l_3=1$，那么 $\frac{7}{2}l_3+\frac{5}{4}l_3+l_3=1$，从而 $\frac{23}{4}l_3=1$，$l_3=\frac{4}{23}$，那么 $l_1=\frac{14}{23}$，$l_2=\frac{5}{23}$. 这就是上述天气 Markov 链稳定分布的概率.

4.1.2 教学效果的 Markov 链

例 11 某校高一年级招生 200 名新生，由 A、B 两位教师担任该年级的数学课，每位教师负责 100 名学生的教学. 在学期初和学期末分别进行了两次统一测试，分别测得两位教师所教学生的成绩分布以及各成绩等级学生在两次测试中的转移情况(如表 3)，试用齐次马尔科夫链的方法比较两位教师的教学效果.

表 3

	A 教师所教班	学期初成绩分布			B 教师所教班	学期初成绩分布		
		优等 30 人	中等 30 人	差等 40 人		优等 50 人	中等 40 人	差等 10 人
期末成绩分布	优等 40 人	25	5	10	优等 60 人	40	20	0
	中等 40 人	5	25	10	中等 30 人	10	15	5
	差等 20 人	0	0	20	差等 10 人	0	5	5

解：先计算学生的分化情况：

对 A 教师班，用 30 分别除第一列，30 分别除第二列，用 40 分别除第三列得到下列矩阵 P

A 教师：	前 1	前 2	前 3	B 教师：	前 1	前 2	前 3
后 1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	后 1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	0
后 2	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{4}$	后 2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
后 3	0	0	$\frac{1}{2}$	后 3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

对于 A 老师：$P=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{6}&\frac{5}{6}&\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，这就是转移矩阵，所以解方程 $l=Pl$.

解得 $l=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0\end{pmatrix}m$，令 $m-100$，得 $l=\begin{pmatrix}50\\50\\0\end{pmatrix}$，即优等生50人，中等50人，差生0人.

优、中、差等分别记为 90%，70%，50%，于是可计算得初始分值为 $30\times 90\%+30\times 70\%+50\times 40\%=68$(分)，最终分值为 $50\times 90\%+50\times 70\%+0\times 50\%=80$(分).

对于 B 老师同理：$P=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{5}&\frac{3}{8}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{8}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，所以解方程 $l=Pl$.

解得 $l=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{15}\\\frac{1}{15}\end{pmatrix}m$，令 $m=100$，得 $l=\begin{pmatrix}\frac{200}{3}\\\frac{80}{3}\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}$，即优等生67人，中等27人，差生6人.

优、中、差等分别记为 90%，70%，50%，于是可计算得初始分值为 $50\times 90\%+40\times 70\%+10\times 50\%=78$(分)，最终分值为 $67\times 90\%+27\times 70\%+6\times 50\%=82$(分).

因为 A 老师的教学效果为 $80-68=14$，B 老师的教学效果为 $82-78=4$，所以 A 老师的教学效果要比 B 老师的效果好.

4.2 线性方程组的矩阵解法

如果在变换 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 下，点 $P(x,\ y)$ 的像 $P'(e,\ f)$ 已知，求点 P 的坐标 $(x,\ y)$，即

$$\begin{cases}ax+by=e,\\cx+dy=f,\end{cases}\text{或}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix},$$

如果 $|A|\neq 0$，那么

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{1}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{1}\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix},$$

其中，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

例 12 解线性方程组 $\begin{cases} x+2y=1, \\ 3x+7y=-2. \end{cases}$

解：原方程组可表示为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 它的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，方程的两边同时左乘 A^{-1}，即

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的解为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}$.

定理 9.3 若 $\text{rank}(A)=\text{rank}(A\mid B)$，线性方程组 $AX=B$ 有解.

(1) 当存在 A^{-1}，则有唯一解；

(2) 当 A^{-1} 不存在，则有无穷解.

若 $\text{rank}(A)\neq\text{rank}(A\mid B)$，线性方程组 $AX=B$ 无解.

4.3 特征值与特征向量

我们考虑一个在第三世界国家可能出现的有关污染与工业发展的模型. 设 p 是现在污染的程度，d 是现在工业发展的水平；p'，d' 分别是 5 年后的污染程度和工业发展的水平. 假定根据其他发展中国家类似的经验，国际发展机构认为以下简单的线性模型是随后 5 年污染与工业发展有关的预测公式

$$\begin{cases} p'=p+2d, \\ d'=2p+d, \end{cases}$$

即 $\begin{pmatrix} p' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ d \end{pmatrix}$.

若最初有 $p = 1$, $d = 1$,则$\begin{pmatrix} p' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;

若最初有 $p = a$, $d = a$,则$\begin{pmatrix} p' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3a \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$.

定义 8.1 如果存在向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,使得$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,其中 λ 是个数,那么称数 λ 为变换 A 的一个特征值,称(非零) 向量$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 为变换 A 的属于特征值 λ 的特征向量.

所以 3 是上式中的系数矩阵 A 的一个特征值,而$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$乘以任何一个数,即形如$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$的向量是 A 的相应的特征向量. 一般地有, $A^k\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = 3^k\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$.

对 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,进行变形可得到$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$.

几何意义:若存在 λ,使矩阵$(A-\lambda I)$作用在二维平面列向量 ζ 上后,将非零向量 ζ 变换成零向量.

例 13 (兔子和狐狸的生态模型)兔子的数量用 R 表示,在没有狐狸时年增长10%,即 $R' = 1.1R$; 狐狸的数量用 F 表示,在没有兔子时的年增长 -15%,即 $F' = 0.85F$. 若二者共存,则种群数量满足关系式:

$$\begin{cases} R' = 1.1R - 0.15F, \\ F' = 0.85F + 0.1R. \end{cases}$$

若初始种群数量为:$\begin{bmatrix} R_0 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$,问若干年后兔子和狐狸的种群数量的变化趋势如何?

解:$\begin{cases} R_n = 1.1R_{n-1} - 0.15F_{n-1} \\ F_n = 0.1R_{n-1} + 0.85F_{n-1} \end{cases}$ $(n \geqslant 1)$,即$\begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.15 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} R_{n-1} \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$,

记$A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.15 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}$,下面求矩阵 A 的特征值和特征向量:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1.1 & 0.15 \\ -0.1 & \lambda - 0.85 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - 1.95\lambda + 0.95 = (\lambda - 0.95)(\lambda - 1) = 0,$$

则特征值为 $\lambda_1 = 1$ 或 $\lambda_2 = 0.95$，特征向量分别为 $\xi_1 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

因为 $C_0 = \begin{pmatrix}R_0\\F_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix} = a\xi_1 + b\xi_2 = a\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则 $a = 2$，$b = 4$.

所以

$$C_n = A^n C_0 = A^n(2\xi_1 + 4\xi_2) = 2\lambda_1^n\xi_1 + 4\lambda_2^n\xi_2$$
$$= 2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + 4\times 0.95^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6+4\times 0.95^n\\4+4\times 0.95^n\end{pmatrix},$$

故当 $n\to\infty$ 时，$R_n\to 6$，$F_n\to 4$，即兔子和狐狸的种群数量分别趋近于 6 和 4.

4.4 求逆矩阵

求一个矩阵的逆矩阵可以用代数方法，也可以用几何方法，前者我们在《线性代数》中已经研究过，即当方阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ 时，A 存在逆矩阵，可以通过代数的方法求解 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$（其中 A^* 为 A 的伴随矩阵）. 下面我们主要讨论后者，如何通过几何变换的方法来求解逆矩阵呢？前面我们以二阶矩阵为例，知道了矩阵可以用来表示变换，并学习了 7 种常见的初等变换；而矩阵的乘法可以看作是变换的复合. 由此，我们可以得到：

定义 9.10 如果对一个向量先实行矩阵 A 的变换，再实行矩阵 B 的变换，结果使得变换后的向量仍然是原来的那个向量，则变换 B 叫做变换 A 的逆变换.

例 14 已知矩阵 $M = \begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{pmatrix}$，把四边形 $OACB$ 其中 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$C(3, 2)$，$B(0, 1)$ 变成了 $OA'C'B'$，其中 $O'(0, 0)$，$A'(3, -1)$，$C'(5, 5)$，$B'(-2, 4)$，即

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 3 & 5 & -2\\0 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix},$$

请用几何方法求 M 的逆矩阵.

解：从几何上讲求一个矩阵的逆矩阵，就是确定一个矩阵变换，它把 A'，B'，C' 变回到 A，B，C.

(1) 先确定一个把 $A'(3, -1)$ 变回到 $A(1, 0)$ 的矩阵. 观察点 A' 与点 A 的坐标特征，再联想伸缩变换的功能，故取矩阵 $M_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，点 A' 在 $M_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ 的作用下变为 $(1, -1)$，即

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=A'',$$

接下来再利用切变变换对应的矩阵 $M_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，把 A'' 变回到 A 点，即

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A,$$

也就是说，对 $A'(3,\ -1)$ 连续实施 M_2，M_1 表示的变换后返回到点 $A(1,\ 0)$，即

$$M_2M_1\overrightarrow{OA'}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

与此同时，在此时点 B 在 M_2，M_1 的作用下变成了

$$M_2M_1\overrightarrow{OB'}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}=\overrightarrow{OB''},$$

没有变成理想中的 B.

(2) 因此接下来我们要选择使 B'' 返回到点 B 同时又对点 A 不作用的矩阵. 和上面一样也是分两步走，先将 $\overrightarrow{OB''}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}$，再将 $\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 由上面的实践知前者是伸缩变换后者是切变变换，根据 B'' 和要到点的坐标特征，选取 $M_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$ 作为伸缩变换的矩阵，则 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}$，可验证 M_3 对点 A 不作用. 再选取 $M_4=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 作为切变变换的矩阵，则 $\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，可以验证 M_4 对点 $A(1,\ 0)$ 也不作用. 也就是说对 $\overrightarrow{OB''}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}$ 连续实施 M_4，M_3 表示的变换后返回到点 $B(0,\ 1)$，同时对点 $A(1,\ 0)$ 不作用. 即

$$M_4M_3\overrightarrow{OB''} = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

这样我们找到了 M_1，M_2，M_3，M_4 四个初等变换的矩阵，依次连续实施这四个初等变换，把点 $A'(3, -1)$和 $B'(-2, 4)$变回到点 $A(1, 0)$和点 $B(0, 1)$，即经过变换 $N = M_4M_3M_2M_1$ 变回原来的点.

又因为 $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，而$\overrightarrow{OC'} = M\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 3\left(M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + 2\left(M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

故 $N\overrightarrow{OC'} = NM\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 3\left(NM\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + 2\left(NM\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

也就是说 $N = M_4M_3M_2M_1$ 能把点 $A'(3, -1)$和 $B'(-2, 4)$变回到点 $A(1, 0)$和点 $B(0, 1)$的同时，也能把 $C'(5, 5)$变回到 $C(3, 2)$. 故四边形 $OACB$ 经过变换 M 变为 $OA'C'B'$，再经过变换 N 变回为 $OACB$. 由定义知矩阵 N 为 M 的逆矩阵，即

$$M^{-1} = N = M_4M_3M_2M_1 = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix},$$

其中 M_1，M_2，M_3，M_4 均为初等变换的矩阵，也就是说矩阵 $M = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵可由这四个初等变换矩阵的乘积表示. 此题求逆矩阵的方法(几何)具有一般性.

本章思考题

1. 任意一可逆矩阵与初等变换矩阵之间有何关系？
2. 已知在矩阵 M 的作用下，四边形 $ABCD$ 变成了 $A'B'C'D'$，其中

   $A(1, 1)$，$B(-1, 1)$，$C(-1, -1)$ 及 $A'(3, -3)$，$B'(1, 1)$，$D'(-1, -1)$.

   (1) 求出矩阵 M，并判断该矩阵是否为可逆矩阵，若是，请求出其逆矩阵；

   (2) 确定点 D 和点 C' 的坐标.

   把矩阵 M 及其逆矩阵(若可逆)分别表示为初等变换矩阵的乘积.
3. 若兔子和狐狸的生态模型为 $\begin{cases}R_n = 1.1R_{n-1} - 0.3F_{n-1}\\ F_n = 0.2R_{n-1} + 0.4F_{n-1}\end{cases}$ $(n \geq 1)$，对初始种群数

量 $C_0=\begin{bmatrix}R_0\\F_0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}100\\50\end{pmatrix}$，讨论第 n 年后种群数量 C_n 及当 n 越来越大时，种群数量 C_n 的变化趋势.

4. 利用逆矩阵方法求下列方程组的解.

$$\begin{cases}x+2y=1,\\3x+7y=-2.\end{cases}$$

5. 通过本章的学习，阐述一下从中学到大学对矩阵理解的变化.

本章参考文献

[1] COMAP 著，申大维等译. 数学的原理与实践[M]. 高等教育出版社，1998.

[2] 袁震东主编. 高级中学课本 数学高二第二学期(试用本)[M]. 上海教育出版社，2007.

第十章　走进算法

算法是数学及其应用的重要组成部分，是计算科学的重要基础．随着现代信息技术飞速发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越大的作用，并日益融入社会生活的许多方面，算法思想已经成为现代人应具备的一种数学素养．算法是一个全新的课题，已经成为计算科学的重要基础，它在科学技术和社会发展中起着越来越重要的作用．

本章结合对具体数学实例，体验算法在解决问题中的作用；通过模仿、操作、探索，学习算法设计、程序框图表达解决问题的过程；体会算法的基本思想，掌握基本的算理以及算法的重要性和有效性，发展有条理的思考与表达的能力，提高学生的逻辑思维能力．

§1　用自然语言表示的算法

算法对我们来说并不陌生，如小学学过的"先乘除、后加减"；若有括号，则由内向外去括号；异分母的两个分数相加减，则要先通分后求分子的和或差等法则；还有公式和口诀（如珠算的"三下五除二"等）等都是算法．

定义 10.1　机械式地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程，被人们称为算法过程．

现代意义的算法通常是指可以用计算机来解决的某一类问题的程序和步骤．下面我们将通过一些最基本的例子来感受一下算法．

例 1　已知如图 1，矩形 $ABCD$ 的长和宽分别为 b，a，求对角线长．

分析与解：就结果来说很简单，只要学过勾股定理的都会求，设 $AC = c$，则 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$．

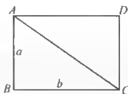


图 1

我们现在研究的重点不是结果而是过程，即如何从已

知到结果的具体运算步骤，经过简单梳理发现应该是：

第 1 步：从已知条件中得到数值 a，b；

第 2 步：求 a^2；

第 3 步：求 b^2；

第 4 步：将第 2 步的结果和第 3 步的结果相加；

第 5 步：将第 4 步的结果开算术平方根；

第 6 步：书写结果.

例 2 已知某一种食品罐头成圆柱体，如图 2，已知它的表面积是 450 cm^2，试建立罐头体积 $V(\text{cm}^3)$ 与底面半径 $x(\text{cm})$ 之间的函数模型.

分析与解答：求体积与底面半径的步骤：

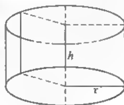


图 2

第 1 步：列出表面积表达式 设罐头的高为 h，则有 $450 = 2\pi x^2 + 2\pi xh$；

第 2 步：解出 h，$h = \dfrac{450 - 2\pi x^2}{2\pi x}$；

第 3 步：代人，$V = \pi x^2 h = \pi x^2 \dfrac{450 - 2\pi x^2}{2\pi x} = 225x - \pi x^3$；

则对任意一个半径 $\left(0 < x < \dfrac{15}{\sqrt{\pi}}\right)$，都可得到相应的体积.

例 3 为了给孩子解释如何使用自动收费的电话机，请对完成这一任务的一系列步骤给出一个详尽的程序性说明：

分析与解答：

第 1 步：拿起话筒；

第 2 步：投币（或插入电话卡），如钱不够，放回话筒，回到第 1 步；

第 3 步：“听到嘟嘟……”拨号音，输人对方电话号码；否则放回话筒，回到第 1 步；

第 4 步：若接通，则通话；若占线，则放回话筒，回到第 1 步；

第 5 步：结束，放回话筒.

这就是生活中的算法.

例 4 如图 3，有两个杯子 A 和 B，分别盛有酒和水，拟定一个将杯中的酒和水互换的方案和步骤.

分析与解答：直接倒是不行的，需要借助第三个空杯子 C.

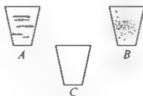


图 3

第 1 步：先将 A 杯中的酒倒在 C 杯中；

第 2 步：再将 B 杯中的水倒在 A 杯中；

第 3 步：最后将 C 杯中的酒倒在 B 杯中.

以上四个例子分别给出了解决问题的方案和步骤，这四个例子的共同点很多，比如都有最初的进入到最后的出口、中间有具体的步骤，这些步骤有效、有限等.

§2 程序框图与算法

上述的几个算法都是用自然语言来描述的，为了表达算法，除了用自然语言，还有其他方法吗？如上节的例 3，我们用图 4 来说明如何使用电话机，是不是比原来用自然语言更一目了然，前后次序更清楚了.

同样上面的例 4"互换两个容器中的液体"也可用图 5 表示.

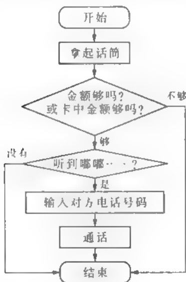


图 4



图 5

两种方法对比下来，用图表示一个问题的解决方案或步骤，整体脉络更清晰. 像这种图，一般称为程序框图. 在上述图中有些是矩形，有些是菱形，它们表达的含义是否一致呢？回答是否定的. 与自然语言不同，程序框图是人为编制的，为了应用的需要，设计人员给每个符号规定了其特有的意义，具体请看表 1.

表1　基本程序框图的含义

记号	名称	含　义
（圆角矩形）	起止框	表示算法开始、结束的框，算法应当有头有尾
（平行四边形）	输入输出框	输入或输出数据框
（矩形）	处理框	表示计算等处理功能的框. 也可以用中文写一些简单易懂的说明
（菱形）	判断框	根据某个条件判断流向. 一个入口，若干个可供选择的出口. 求值结果可在表示出口路径的流线附近写出
→	流线	表示处理结果、判断等的流向

上节例1用程序框图表示则为图6.

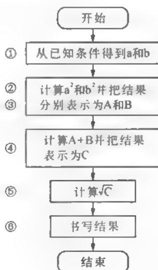


图6

例5　一队士兵在行军中来到一条有鳄鱼的深河的左岸. 现只有一条为两个儿童所有的小船可供使用，该船一次只能承载两个儿童或一个士兵. 问这队士兵怎样渡到右岸（这里不许使用绳或其他方法）?

分析与解：两个儿童（用 $T1$，$T2$ 表示）把船划到对岸；他们中一个上岸（不妨

假设 $T1$)，另一个($T2$)划回来；儿童上岸，一个士兵(用 $G1$ 表示)划船渡过去；士兵上岸，让儿童 $T1$ 划回来. 这样一个士兵渡到了右岸，船和两个儿童都在左岸，即回到了他们原先的位置. 接下来，只要重复上述过程，直到把左岸的士兵全部渡到右岸为止. 此问题的算法用程序框图可表示为图 7.

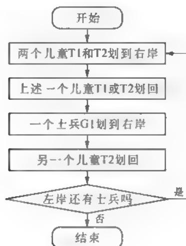


图7

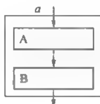


图8

一般程序框图，由上往下按箭头方向前进，框与框之间是有序的，比如例 1 中的顺序是：做完 a^2+b^2 后，再做开方；例 5 中的顺序是：两个儿童先划到对岸，然后其中之一回来等. 这些在算法中称为顺序结构，如图 8 所示 A 和 B 两个框是按顺序进行的，即在执行完 A 框所指定的操作后，必然接着执行 B 框所指定的操作，顺序结构是算法结构中最简单的一种.

有了程序框图，原来在用自然语言表示的算法中，出现的那些"如果"、"否则"、"回到第 n 步"等等的说法，现在就可以表现得较清晰，整个解决问题的框架、步骤、逻辑关系也显得直观形象，同时为把算法转化为计算机语言(计算机能执行的命令)做了准备.

§3 自然语言与计算机语言

我们前面已分别用自然语言和程序框图写出了"已知矩形的长和宽，求对角线长"的算法，那么计算机是否就可以按我们的意图执行了？回答是否定的. 计算机只能理解计算机语言，上面程序框图中出现的"求 a^2"计算机根本无法理解，为此必须将上面程序框图中的表达式改进，尽可能用符号表示，让它贴近计算机语言.

为此我们先来大致了解一下计算机的工作原理.

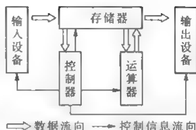


图9 计算机结构框图

计算机由存储器、运算器、控制器和输入输出设备组成，其相互关系如图9所示.

存储器、运算器、控制器称为主机，其中的运算器与控制器称为中央处理机(简称CPU). 存储器用来存放程序和数据，按需要向存储器存、取数据. 一般为了管理上的方便，可把一个存储器分为若干个单元，每个单元好像一个大旅馆中一个个房间，每个存储单元均有一个编号，该编号常称为地址. 存储器的特点：当其内容被"取"出之后，并不改变存储单元中原有的内容，只有向该存储器单元存入新的内容时，其原来的内容才会被"冲"掉，这样对存储器单元的"存"与"取"应理解为"写入"与"读出". 运算器用来完成各种算术运算、逻辑运算和字符运算. 控制器是整个机器的指挥，它按输入到计算机的程序指令，向机器各部分发出控制信号，使整个机器按要求协调地工作. 输入设备用于把程序及原始数据转换成计算机可以识别的代码，并送入存储器中保存. 像键盘、读卡器等都是常用的输入设备. 输出设备用于送出计算结果及人们所需的其他信息，像打印机、光盘、显示器等都是常用的输出设备.

已知数 a，求 a^2，首先要把数据 a 输入到计算机中，那么输入到计算机中哪个部位？看了上面计算机的工作原理图及各个部位的功能，便知是输入到了存储器中，而存储器中有很多单元，为此要进行单元的分配，这个工作是由计算机自己完成的，而分配好的单元必须要有个名称(如 A)，以便写入和读出. 存储器的单元名称一般用大写字母 A、B、C 等表示. 在程序框图中，为了简便，将原来的"把数据 a 输入到存储单元 A 中"，可表示成 $A \leftarrow a$，或 $a \rightarrow A$. 在存储单元里有了原始数据，就可以进一步进行计算了. 在运算器中完成计算 $a*a$，再把算完的结果放回存储器 A 中，由于存储器具有一旦输入新的信息后，原来的信息被冲掉的特点，故此时存储器 A 中的数据已是 a^2，所以自然语言"求 a^2"，在程序框图中表示成图10中的左图即可. 事实上也可以将后两步合并成一步，见图10中的右图，后一个框的意义是先计算 $a*a$，然后放入存储器 A 中.

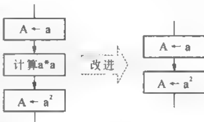


图10

"求 b^2"也可以用类似的方法. 并且可以将"把数据 a 输入到存储单元 A 中""把数据 b 输入到存储单元 B 中"这两句话，写在一起如图所示. 甚至可省略成"输

入数据 a". 我们也可以把存储单元看成变量,"把数据 a 输入到存储单元 A 中"可以理解为给变量 A 赋值 a,有时也写成 $A=a$,即把右边的值赋给左边的变量 A.

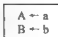


图 11

了解了这些规则后,我们不仅可以用较简单的符号来表达一些文字说明,而且为以后计算机程序的书写作了准备."已知线段 a, b,求 $\sqrt{a^2+b^2}$"的程序框图可改进为图 12.

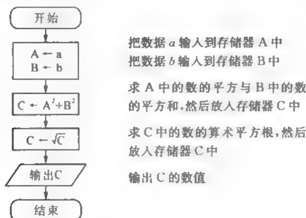


图 12

值得我们注意的是在程序框图中,出现的 $C \leftarrow A^2+B^2$,表示把存储器 A 中的数的平方、把存储器 B 中的数的平方(而不是把存储器平方),然后将它们相加后的结果放入存储器 C 中,因为存储器 A, B 中已被分别输入数据 a, b,所以可以这么写,上面所作的工作实际上是计算 a^2+b^2. 以后遇到类似的问题,作同样处理.

例 6　画出求 x 的绝对值 $|x|$ 的程序框图.

分析与解: 因为当 $x \geqslant 0$ 时, $|x|=x$; 当 $x<0$ 时, $|x|=-x$; 所以求 $|x|$ 的算法为

第 1 步:输入数据 x;

第 2 步:X 中的数与 0 比较大小:

如果 $X \geqslant 0$ 则转入第 3 步;

如果 $X<0$ 则转入第 4 步;

第 3 步: $X=x$ (即 x 的值放入 X);

第 4 步: $X=-x$ (即 $-x$ 的值放入 X);

第 5 步:输出 X 中的数.

图 13 就是题目所要求的程序框图.

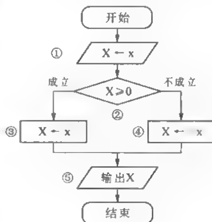


图 13

程序框图中判断框内的 $X \geqslant 0$，表示 X 的值与 0 进行比较. 若 $X \geqslant 0$ 则流向③；若 $X < 0$ 则流向④；这种情形在算法中称为条件结构，一般如图 14 所示，根据给定的条件 P 是否成立而选择执行 A 框或 B 框."成立"，"不成立"有些书中有时也用英文 Yes，No 表示.

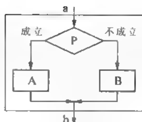


图 14

例 7 已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，设计一个求该方程解的算法，并画出其程序框图.

分析与解：用一元二次方程的系数表示它的根，我们已经很熟悉了，先计算判别式 $D=b^2-4ac$，然后根据它大于等于零还是小于零，来判别原方程有无实根. 具体步骤为：

第 1 步：先输入三个数 a，b，c；

第 2 步：计算判别式 $D=b^2-4ac$；

第 3 步：判断方程有无实根；

若 $D \geqslant 0$，方程有实根；则进入第 4 步；

若 $D < 0$，方程无实根；则进入第 5 步；

第 4 步：利用求根公式计算

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a};$$

第 5 步：表示结果.

其程序框图如图 15 所示.

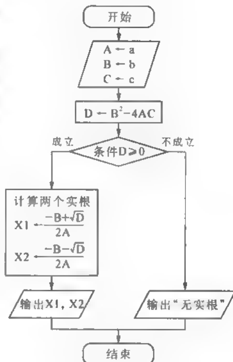


图 15

例 8 设计一个求 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times100$（这个称为 100 阶乘）的算法，并画出其程序框图.

分析与解：对这样的问题最容易想到的方法是：

第 1 步：先求 1×2，得到结果 2；

第 2 步：将第 1 步得到的乘积 2 乘以 3，得到结果 6；

第 3 步：将第 2 步得到的乘积 6 再乘以 4，得 24.

…

第 99 步：将第 98 步的结果乘以 100 后，则得到了 1 到 100 的 100 个自然数连乘的结果.

这样的算法虽然正确，但太繁琐，要写 99 步. 于是思考是否可以改进，分析计

算过程，发现第 2 步，第 3 步，……，第 99 步它们所做的都是同样性质的工作，即将前一个步骤的结果×（前一个乘数+1），因此只要将这重复步骤表达出来即可. 如何表达？这里需要变量帮忙，设变量 T，I，令 T 为第一个被乘数 1，I 为第一个乘数 2，则 $T\times I$ 就是第一次积，这个积就是下一次乘法的被乘数；完成了第一次积，则原来的被乘数 1 和乘数 2 不再需要，因此可以将 $T\times I$ 的值放入 T 中作为第二次的被乘数，同时将原来的值冲掉；第二次的乘数 3 是在原来的乘数 $I=2$ 的基础上加 1 而得，因此只需 $I+1$，然后再将 $I+1$ 放入 I 中作为新的乘数，同时冲掉原来的值 2；这样的工作只要 $I\leqslant 100$，就让它反复循环做. 改进的算法为：

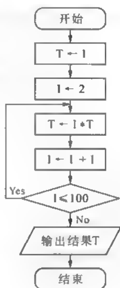


图 16

第 1 步：令变量 $T=1$；

第 2 步：令变量 $I=2$；

第 3 步：计算 $T\times I$. 将其积 $T\times I$ 放在变量 T 中，用 $T\leftarrow T\times I$（即对变量 T 赋值 $T\times I$）表示；

第 4 步：使 I 的值 +1，将 $I+1$ 放在变量 I 中，用 $I\rightarrow I+1$（即对变量 I 赋值 $I+1$）表示；

第 5 步：如果 $I\leqslant 100$，返回重新执行步骤 3、步骤 4；否则，算法结束.

第 6 步：输出运算结果.

图 16 就是所要求的程序框图.

若要计算 1 至 n（n 为任意的自然数）的连乘积，只需将第 4 步中的 $I\leqslant 100$ 改成 $I\leqslant n$ 即可，具有通用性. 从这里我们发现解决一个问题的算法往往不止一种. 有的复杂，有的则比较简单. 因此，算法有优劣之分. 我们追求的是对计算机操作来说比较简单的算法.

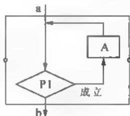


图 17

这里第 3 步至第 5 步是一个反复过程，这在算法中称为循环结构，如图 17 所示. 循环结构中一般都同时带有判断结构，它是一种重要的结构，可使算法简捷明了.

§4 几种常用的算法

在本节中将通过具体的例子介绍几个常用的算法.

例 9 有一台较老式的计算机仅会做“+”和“-”运算，现有两个自然数 M，

N,求 M 被 N 除后所得的商和余数的算法,并画出程序框图.

分析与解:虽然题目要做除法,但机器只会做"+"和"−"运算.我们知道除法其实就是反复做减法,直到差小于 N 为止,这时的差为余数,而相减了几次的次数就是商.具体操作步骤为:

第 1 步:输入数据 m, n;

第 2 步:令变量 Q(表示从 M 中减去 N 的次数) 0;

第 3 步:如果 $M < N$,则执行步骤 6.否则执行步骤 4, 5, 6;

第 4 步:将 $M-N$ 的值代入 M,即 $M-N \to M$.

同时 Q 的值加 1,代入 Q 中,即 $Q+1 \to Q$;

第 5 步:再回到步骤 3;

第 6 步:表示商 Q 和余数 M.

这样,经过有限步的重复操作之后会停止,同时也得到了最终结果.这里从第 3 步至第 5 步也是一个循环结构.图 18 就是相应的程序框图.

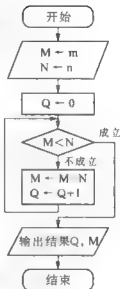


图 18

在讲下一个例子前,先来看一个问题,有一个底面长 174 cm,宽 78 cm 的长方体蛋糕,请你将它全部(蛋糕切完)切成底面为正方形且大小一样的若干块,要求正方形尽量大,问如何切?

分析:据题意所要求的正方形的边长,既要是长 170 的约数,又要是宽 78 的约数,因此只要找它们的公约数即可,显然 2, 3, 6 等均可,但题目还要求正方形尽量大,则要求它们的最大公约数,可用短除法,得最大公约数为 6,故只要切成边长为 6 cm 的正方形就可以了.

上述问题的本质是求两个正整数的最大公约数问题,采用的方法是短除法,但这种方法对较大的两个自然数有时不方便,比如求 525 与 231 的最大公约数,若用此法,很难马上见效,原因是用短除法求最大公约数,有一个试商的问题,上面 174, 78 都是偶数,很容易看出有公约数 2;而现在 525 与 231 一下子很难看出它们的公约数是什么,为此这里介绍一个一般的求两个正整数的最大公约数的方法,以 525 与 231 为例,加以说明:

$525 \div 231$…… 商 2,余数 63,

$231 \div 63$…… 商 3,余数 42,

$63 \div 42$…… 商 1,余数 21,

$42 \div 21$…… 商 2,余数 0.

显然,525 与 231 的最大公约数=231 与 63 的最大公约数=63 与 42 的最大公约数=42 与 21 的最大公约数=21. 这种方法称为"辗转相除法",又称为"欧几里得算法". 这个方法适用于求任何两个正整数的最大公约数. 在计算机中为了把上述商 2 表示出来,可用一个取整函数 $\mathrm{INT}\left(\frac{525}{231}\right)$ 来求商的整数部分,余数=被除数-商×除数.

例 10 写出求任意两个正整数 M, N 的最大公约数的算法(欧几里得算法),并画出程序框图.

分析与解:根据上面的讨论,我们得到求任意两个正整数 M 和 N 的最大公约数,其算法为:

第 1 步:输入数据 M, N;

第 2 步:判断 M, N 的大小,若 $N>M$,则 M 与 N 互换;

第 3 步:计算 M 除以 N 所得余数 $M-\mathrm{INT}\left(\frac{M}{N}\right)\times N$,然后放人存储器 R 中;

第 4 步:判断余数 R:

若余数 R 等于 0,则执行步骤 6;

若余数 R 不等于 0,则执行步骤 5.

第 5 步:N 作为被除数,(用 N 的值替换 M 的值,即 $M\leftarrow N$),R 作为除数(用 R 的值替换 N 的值,即 $N\leftarrow R$),再一次计算 $M-\mathrm{INT}\left(\frac{M}{N}\right)\times N$,然后放入存储器 R 中;返回第 4 步.

第 6 步:N 就是所求的最大公约数.

第 7 步:表示结果最大公约数.

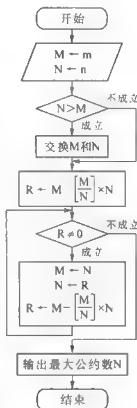


图 19

例 11 某女生打排球受伤,医生嘱咐服用某种药物. 每粒药丸含 220 毫克药物,每 8 小时服 2 粒,连续服用 10 天. 已知每过 8 小时女生身体中药物的残留量为原来的 40%,试问 10 天后,该女生身体中的药物残留量是多少? 要求写出算法,并画出程序框图.

分析与解:以 8 小时为一时间段,1 天 24 小时,有 3 个时间段;10 天则有 30 个时间段. 令 x_k 为第 k 个时间段的药物含量. 于是:

$$x_1 = 440,$$
$$x_2 = 440\times 40\% + 440 = 616;$$

$x_3 = 616 \times 40\% + 440 = 686.4$;

…

可得递推公式 $x_{k+1} = 40\% x_k + 440$.

其算法为:

第1步:令 $k = 0$;

第2步:$k = k+1$;

第3步:循环计算 $x(k+1) = 40\% \times x(k) + 440 (k = 1, 2, \cdots, 30)$

第4步:若 $k < 30$,则返回第2步.

第5步:输出 $x(k)$.

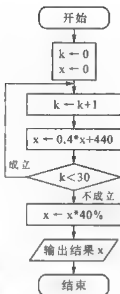


图20

例12 写出612分解质因数的算法.

分析与解:因为612是偶数,很容易想到用2除,得 $612 = 306 \times 2$;上式中306还可以分解;306仍然是偶数,再用2除,得 $306 = 153 \times 2$;上式中153为奇数,用3除,得 $153 = 51 \times 3$;上式51中是否有质因数3不知,但可用3试一下,成功了,$51 = 17 \times 3$;上述17中是否还有约数3呢?同样试一下,结果没有.那么,17中是否有约数4呢?没有了.因为,若有则一定是2的约数,但上面已将2的约数都搜遍了,所以不可能有.17中是否有约数5呢?结果,没有.6是否是17的约数?7是否是17的约数?… 用短除法(图21)可以发现,$612 = 2^2 \times 3^2 \times 17$.

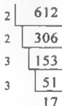


图21

无论是分析还是用短除法检验,发现到17就不能再分解了,即 $612 = 2^2 \times 3^2 \times 17$. 也许大家会说,17已是质数,不能再分解了,对的.这里提供了更一般的考虑问题方式,为了编程方便,不对约数进行选择,让其从 $k = 2$,依次(即下一个为 $k+1$)一直到 $\sqrt{N}$,分别作为除数进行试除.为何算到 $\sqrt{N}$ 就可以了,这是因为:若 k 为自然数 N 的约数,则 $\frac{N}{k}$ 也是 N 的约数.设 $k \leqslant \frac{N}{k}$,则 $k^2 \leqslant N$,即 $k \leqslant \sqrt{N}$.

通过上面的分析我们将其算法整理一下便得到:

第1步:用最小的质数2除612,直到不能整除为止;

第2步:用2的下一个自然数3除上述最后一个商153,同样直到不能整除为止;

第3步:同样用3的下一个自然数4除上述最后一个商17,同样直到不能整除为止.由于17不可能被4整除,又因为 $5 \times 5 = 25 > 17$,故17为质数.

例13 判断2005年是否为闰年,将结果输出.

分析与解：先要介绍相关的闰年知识，闰年的条件：(1)能被4整除，但不能被100整除的年份是闰年；(2)能被100整除，又能被400整除的年份是闰年；不符合这两个条件的年份不是闰年.

因此，给定一个年份a，确定它是否为闰年关键是需要判定. 这里有3个判断处：4，100，400. 那么a不能被4整除，则不是闰年；反之还要进一步用100来判断. 若不能被100整除，则是闰年；若能被100整除，还要进一步判断能否被400整除，若能被400整除则是闰年，反之不是. 用图22表示即为：



图22

具体的算法如下：

第1步：输入a.

第2步：判断a能否被4整除：

若不能则输出"a年不是闰年"；

若能被4整除，则进一步判断a能否被100整除.

第3步：若a不能被100整除，则输出"a年是闰年"；

若a能被100整除，则进一步判断能否被400整除.

第4步：若a不能被400整除，则输出"a年不是闰年"；

若a能被400整除，则输出"a年是闰年".

相应的程序框图如图23所示.

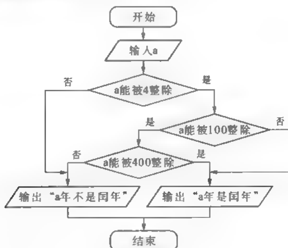


图23

综上所述，算法一般由顺序、条件和循环三种基本结构组成. 顺序结构是由若干个依次执行的处理步骤组成，这是任何一个算法都离不开的基本主体结构. 如第一节中的例 1 就是典型的顺序结构；条件结构是以条件的判断为起始点，根据条件是否成立而决定执行哪一个处理步骤，如例 6、例 7 等均属于条件结构. 循环结构，它又称重复结构，即反复执行某一部分的操作，如例 8，例 9 等都是循环结构.

§5　算法与计算机程序

我们学习算法除了要掌握算法的思想外，还有一个目的就是让计算机帮助人类解决问题，为了达到这个目的，有两个问题需要解决，其一：要将解决问题的步骤告诉计算机；其二：写出的内容计算机要能够辨别.

5.1　计算机语言介绍

“算法是计算机科学的基础”，计算机完成任何一项任务都需要算法. 关于第一个问题我们在前面已经做了很多准备工作，分别用自然语言或流程图来表达算法，但是众所周知，计算机是无法直接理解人类的语言的，如何让计算机明白人类的意图？经过科学家的努力，开发出了一种计算机能够理解的语言——计算机程序设计语言(简称计算机语言). 随着计算机科学的迅速发展，现在已开发出了很多计算机语言. 本章的主要任务就是将上述的算法用计算机语言表达. 这样就达到了学习算法的又一目标.

计算机语言是由一些有特定含义的程序语句构成，大多数的计算机语言一般都有输入输出语句、赋值语句、条件语句和循环语句等这几个基本语句. 虽然不同的计算机语言，有不同的语句形式和语法规则，但基本结构是相同的. 这里我们选择 Visual Basic 语言编写算法，对于 Visual Basic 来说，获取数据和输出结果一般是通过用户界面来实现的. Visual Basic 语言中语句有很多，这里只简单介绍 Visual Basic 中最常用的语句，详细请参阅 Visual Basic 的有关书籍.

Visual Basic 中最常用的语句有赋值语句，即 LET 语句；注释语句，即 REM 语句；条件分支语句，即 IF……THEN　ELSE 语句；循环语句，即 FOR…NEXT 语句或 DO UNTIL…LOOP 语句.

1. Visual Basic 中常用计算符号说明

加法为＋，减法为－，乘法为＊，除法为/，乘方为∧，平方根为 SQR，绝对值为 ABS，大于等于为＞＝，不等于为＜＞；数组 X_i 要写成 $X(i)$等.

2. Visual Basic 中常用语句说明

(1) 赋值语句　　LET 语句

主要用来表示给变量赋值，一般形式：

〔LET〕变量名 = 表达式

其中"="是赋值号，将右边的表达式的值赋给左边的变量．如在求 n 阶乘的算法中，要给变量 T 赋值 1，则可表示 $T=1$．注意赋值号不同于数学中的等号，另外在具体使用中往往省略 LET．

(2) 注释语句——REM 语句

注释语句是对一段程序或一个语句的功能加以说明，用来改善程序的可读性．注释语句是不可执行语句．一般形式为：

Dim … As …

如"欧几里得"算法中要说明 A 是正整数，则可表示为：Dim A As Long；又如"一元二次方程求根"算法中，要说明系数 a，b，c 均为实数则可表示为：Dim A，B，C As Double．

(3) 条件分支语句——IF……THEN　ELSE 语句

条件分支语句主要用在算法中的条件结构，一般形式：

```
IF 条件 THEN
    语句 1
ELSE
    语句 2
END IF
```

其功能为当条件满足时执行语句 1，否则执行语句 2．如"求一元二次方程根"的算法中有条件结构：如判别式 D>=0，那么可以利用求根公式求实根，否则输出无实根．则可用条件分支语句表示如下：

```
IF D>=0 THEN
    x1=(-b+Sqr(D))/(2 * a)
    x2=(-b-Sqr(D))/(2 * a)
ELSE
    无实根
END IF
```

(4) 循环语句——FOR…NEXT 语句或 DO UNTIL…LOOP 语句

循环语句主要用于表现算法中的循环结构．一般形式：

```
FOR 循环变量=初始值 TO 终止值〔Step 增量〕
    〔语句块〕
NEXT
```

其功能用来重复执行一段指令(语句块),往往与条件语句一起使用. FOR 表示循环开始,循环变量取"初始值",检查"初始值"是否小于等于"终止"值. 如果条件满足,则执行循环体(即语句块),当遇到 NEXT 时,循环变量增加一个"增量"值,再次与终止值比较,如果仍未大于"终止值",则继续下一轮,否则跳出循环体,执行 NEXT 后面的语句. 值得注意的是,循环变量必须为数值型变量,一般为整数型,增量若为 1,则 STEP 可省略,否则不可省略. 比如增量 2,则要写 STEP 2. 循环语句是非常重要的语句,有了它可使得程序变得简捷明了. 如在求 100 阶乘的算法中"从 1 开始一直乘到 100,增量为 1"用循环语句表示则为

```
FOR I=1 TO 100
    T=I * T
NEXT
```

其完整算法为

```
Private Sub Command1_Click()
Dim i As Long
Dim t As Double
Dim m As Long
    m=Form1. m. Text
    t=1
    For i=1 To m
      t=t * i
    Next
    Form1. j. Text=t
End Sub
```

5.2 用 Visual Basic 语言描述的算法

下面我们用 Visual Basic 语言来表示在上面几节中遇到的一些算法.

例 14 用 Visual Basic 语言编写 §3 的例 7"求一元二次方程根"的算法.

解:此题用 Visual Basic 语言编写程序如下:

```
Private Sub CmdRun_Click()      '求解一元二次方程的根
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim c As Double
Dim d As Double
```

```
    a=Form1.a.Text                     '从用户界面上获取二次项系数
    If a=0 Then
        Form1.a.Text="a 不可为零"      '若二次项系数为 0,则报错
        Exit Sub
    End If
    b=Form1.b.Text                     '从用户界面上获取一次项系数
    c=Form1.c.Text                     '从用户界面上获取常数项

    d=b * b-4 * a * c                  '计算 d
    If d>=0 Then                       '若 d≥0,则有实根
        Form1.x1.Text=(-b+Sqr(d))/(2 * a)
                                   '计算实根 x1,并输出到用户界面上
        Form1.x2.Text=(-b-Sqr(d))/(2 * a)
                                   '计算实根 x2,并输出到用户界面上
    Else                           '否则,则无实根
        Form1.x1.Text="无实数根"
                                   '输出"无实数根"字样到用户界面
        Form1.x2.Text=""
    End If
End Sub
```

例 15 用 Visual Basic 语言编写 § 4 的例 10 的"欧几里得"算法.

解:此题用 Visual Basic 语言编写的程序如下:

```
Private Sub Command1_Click()       '欧几里得
Dim M As Long
  Dim N As Long
  Dim R As Long
  Dim T As Long
        M=Form1.M.Text                 '从界面上获取 M
        N=Form1.N.Text                 '从界面上获取 N
        If N> M Then                   '若 N>M
              T=M                      '将 M 与 N 进行交换
              M=N
              N=T
        End If
```

```
        R=M-Int(M/N) * N              '求余数(为循环条件判断用)
        Do While R <> 0               '如果余数不为零
        '循环体始点,进入循环体的条件为满足 R <> 0
            M=N                       '设置新的 M
            N=R                       '设置新的 N
            R=M-Int(M/N) * N          '求余数
          '循环体终点
        Loop
        Form1. R. Text=N
End Sub
```

例 16 用 Visual Basic 语言编写 § 4 例 11 的"药物残留量"的算法.

解：此题用 Visual Basic 语言编写的程序如下：

```
Private Sub Command1_Click()
'求人体内的药物残留量
Dim T As Long
Dim x As Double
Dim R As String
Dim I As Long

    T=Form1. T. Text                              '从界面上获取 T
    If T <=0 Then
        Form1. T. Text="T 必须大于 0!"             '若 T<=0,则报错
    End If

    For I=1 To T
    '循环体始点,循环次数为从 1 到 T
        x=x * 0.4+440                             '计算药物残留量
        x=Int(x * 10000+0.5)/10000                '保留小数 4 位
        R=R & I & Chr(9) & x & vbCrLf             '整理输出格式
    '循环体终点,
    Next I
    Form1. R. Text=R                              '输出到用户界面

End Sub
```

例 17 用二分法求方程 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-1=0$ 的根的误差小于 0.000 005

的近似根，要求写出算法、计算机语言程序并用程序框图表示.

分析与解：首先在 $0 < x < 5$ 范围内，画出大致图形，从一个两端函数值异号的初始区间开始. 因为 $f(1) = -1$，$f(2) = 0.59$，故初始区间为 $[a, b] = [1, 2]$；取 a，b 的中点 $m = \frac{a+b}{2} = 1.5$，由于 $f(1.5) = -0.3445$，故新区间 $[a_1, b_1] = [1.5, 2]$，显然它包含 $f(x) = 0$ 的根；再取 $[a_1, b_1]$ 的中点 $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 1.75$，由于 $f(1.75) = 0.0891$，故新区间 $[a_2, b_2] = [1.5, 1.75]$，新区间 $[a_2, b_2]$ 的长度为 $\frac{b-a}{2^2}$，显然它也包含 $f(x) = 0$ 的根 …… 重复上面的做法，10 次迭代后，可得根的近似值为 1.701 61. 具体算法如下：

第 1 步：$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - 1$.

第 2 步：输入 $x(1) = 1$，$x(2) = 2$，误差 $D = 0.000\,005$.

第 3 步：计算

$y(1) = x(1) \wedge (5/3) - x(1) \wedge (2/3) - 1$；

$y(2) = x(2) \wedge (5/3) - x(2) \wedge (2/3) - 1$.

第 4 步：判断 $y(1) * y(2)$ 是否小于零.

否即 $y(1) * y(2) > 0$，则返回第 2 步，重新选择初始值；

是即 $y(1) * y(2) < 0$，则进入第 5 步.

第 5 步：计算 $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

第 6 步：判断 $y(m)$ 是否为 0.

是则 m 为所求，转入第 7 步输出；

否则继续判断 $y(1) * y(m)$ 大于 0 还是小于 0；

若 $y(1)y(m) > 0$，则 $x(1) = m$；

否则判断 $|x_1 - x_2| < D$，

是则转入打印 m；

否令 $x(2) = m$. 转入第 5 步.

第 7 步：输出.

第 8 步：结束.

其程序框图为图 24 所示

用 Visual Basic 写的计算机程序为

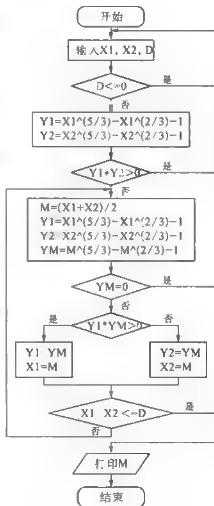


图 24

```
Private Sub Command1_Click()
Dim F1 As Double
Dim F2 As Double
Dim P As Double
Dim R1 As Double
Dim R2 As Double
Dim RM As Double
Dim M As Double
        If Form1.P.Text="" Or Form1.P.Text < 0 Then
                                              '检验给出的精度是否<=0
        MsgBox "请给出适当的计算精度."            '若是,则给出错误信息
        Exit Sub                              '退出运算
    End If
    F1=Form1.F1.Text                          '从用户界面获取取值范围 1
    F2=Form1.F2.Text                          '从用户界面获取取值范围 2
    P=Form1.P.Text
    R1=F1 ^ (5/3)-F1 ^ (2/3)-1
    R2=F2 ^ (5/3)-F2 ^ (2/3)-1
    If R1 * R2> 0 Then                        '判断所给的范围内有无实数根
        MsgBox "给出的范围无实数根"            '若无,给出出错信息
        Exit Sub                              '退出运算
    End If
    M=F2                        '如果给定的初值范围已经满足所定的精度,
                                              '则将右端值认定为解
    Do Until Abs(R1+R2) <=P    '如果不满足所定的精度,则进入循
环体
        '循环体始点,进入循环体的条件为不满足 Abs(R1+R2) <=P
        M=(F1+F2)/2                           '求给定的初值范围的中值
        R1=F1 ^ (5/3)-F1 ^ (2/3)-1            '求左端点的函数值
        R2=F2 ^ (5/3)-F2 ^ (2/3)-1            '求右端点的函数值
        RM=M ^ (5/3)-M ^ (2/3)-1              '求中点的函数值

        If RM=0 Then                '如果中点的函数值为零,则该点就是解
            Exit Do
```

```
        End If

        If R1 * RM> 0 Then                              '解在中点之右
            R1=RM                                     '将中点作为新的左端点
            F1 -M
        Else                                            '解在中点之左
            R2-RM                                     '将中点作为新的右端点
            F2=M
        End If
      '循环体终点
    Loop                                      '返回循环体始点，再次进行运算
    Form1. R. Text -M                                 '将解输出至用户界面
  End Sub
```

例 18 现有 4 个暗箱 A_1、A_2、A_3、A_4，它们分别装有重量为 70 g、30 g、40 g 和 20 g 的砝码(并非依次)，请设计一个方案使这些砝码按由轻到重排列？

分析与解：这个问题的算法为

第一步：首先 A_1 与 A_2、A_3、A_4 顺次比较，将轻的砝码换入 A_1 箱中，结果显然 A_1 箱中的砝码最轻.

第二步：再将 A_2 与 A_3、A_4 顺次比较，将轻的砝码换入 A_2 箱中.

第三步：最后将 A_3 与 A_4 比较，将轻的砝码换入 A_3 箱中.



图 25

具体操作如图 25 所示

用 Visual Basic 语言可编写成如下程序：

```
Public Sub Sort(A() As Double)
    For I=1 To UBound(A()) - 1
        For J=I+1 To UBound(A())
            If A(I)>=A(J) Then
            X=A(I): A(I)=A(J): A(J)=X
              End If
            Next J
          Next I

        End Sub
```

程序框图如图 26 所示.

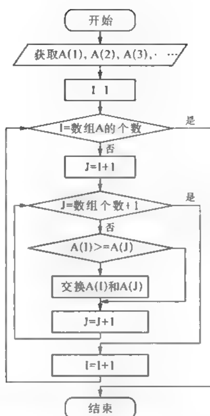


图 26

这个程序通常称为排序算法,有时也称冒泡算法.

上面我们介绍了算法的概念,用三种表达方式即自然语言、程序框图以及计算机语言写出了算法. 欧几里得算法、递归算法、排序算法等都是基本而典型的算法. 顺序、条件和循环是算法的三种基本结构,顺序结构是基本,循环结构是关键,条件结构伴随循环结构. 这三个结构的共同点是:只有一个入口点;只有一个出口点;结构内的每一部分都有机会被执行到,也就是说,对每一个框来说应当有一条从入口到出口的路径通过它;结构内不存在"死循环"(无终止的循环).

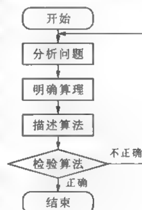


图 27

对一个具体问题的算法设计思路可以用图 27 来概括. 算法是计算机的灵魂,对一个特定问题它的算法设计,首先希望能够解决问题,然后选择好的策略,最后追

求上优的算法.

本章思考题

写出下列各题的算法,画出程序框图.对第3、4题还要求写出计算机程序,条件允许的话请在计算机上执行该程序.

1. 已知三角形的三边 a, b, c,求该三角形的面积.
2. 已知自然数 M, N,求他们的最小公倍数.
3. 求 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}$.
4. $S=100\times1+99\times2+98\times3+\cdots+3\times98+2\times99+1\times100$.
5. 输入任意10个自然数,写出将它们由大到小排列的算法.

本章参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验稿)[M].人民教育出版社,2003.
[2] 永尾汎主编.高等学校数学B[M].数研出版社,1996.
[3] 谭浩强,薛淑斌,袁玫. VISUAL BASIC程序设计[M].清华大学出版社,2000.

附录1

算法设计的基本方法

如何设计算法是研究算法的主要任务之一,下面介绍最常用的几种算法.

1. 枚举法(也称穷举法)

枚举法是列举所有可能情形,并从中找出符合要求的解.枚举法是计算机应用领域中十分重要的方法.许多实际问题,若采用人工列举是不可想象的,但由于计算机的运算速度快,擅长重复操作,因而可以进行大量的列举.枚举算法是计算机算法中的一个基础算法.当然,枚举法是比较笨拙而原始的方法,它最大的缺点是运算量比较大,但在有些实际问题中,局部使用枚举法却是很有效的.例如,对于寻找路径、查找搜索等问题,局部使用枚举法是一种行之有效的方法.

枚举所有可能情形,最直观的是联系循环的算法.

例1 找出 n 个自然数 $(1, 2, 3, \cdots, n)$ 中 r 个数的组合.

分析与解：比如当 $n=5$，$r=3$ 时，所有组合为：

5	4	3
5	4	2
5	4	1
5	3	2
5	3	1
5	2	1
4	3	2
4	3	1
4	2	1
3	2	1

total＝10　{组合的总数}

n 个数取 r 个的组合，其中每 r 个数中，数不能相同. 另外，任何两组组合的数，所包含的数也不应相同. 例如，5、4、3 与 3、4、5. 为此，约定前一个数应大于后一个数.

将上述两条不允许为条件，当 $r=3$ 时，可用三重循环进行搜索.

例 2　百鸡问题

百鸡问题描述的问题是：公鸡一只值五文钱；母鸡一只值三文钱；小鸡三只值一文钱. 现在买了这三种鸡共一百只，恰用了一百文钱. 问公鸡、母鸡、小鸡各买了多少只？

分析与解：这实际上是一个不定方程的问题. 设公鸡、母鸡、小鸡数分别为 I，J，K，则应满足如下条件：

$$\begin{cases} I+J+K=100, \\ 5I+3J+\frac{1}{3}K=100. \end{cases}$$

用解不定方程的解法得 $\begin{cases} I=4t, \\ J=25-7t, \\ K=75+3t. \end{cases}$（其中 t 为整数）

因为 I，J，K 是非负整数，所以 t 只能取 0，1，2，3，因此得四组解

$$\begin{cases} I=0, \\ J=25, \\ K=75, \end{cases} \quad \begin{cases} I=4, \\ J=18, \\ K=78, \end{cases} \quad \begin{cases} I=8, \\ J=11, \\ K=81, \end{cases} \quad \begin{cases} I=12, \\ J=4, \\ K=84. \end{cases}$$

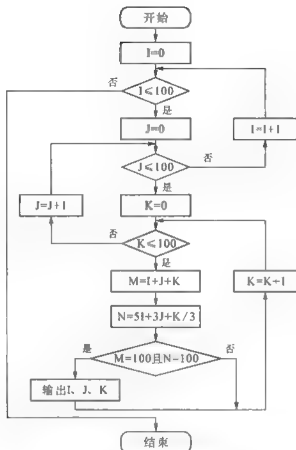


图 28　求解百鸡问题的程序框图

2. 回溯法

与枚举法不同，回溯法并不是去一一验证问题的各种可能的情况，而是采用一种试探的策略，是一种选优搜索法，按选优条件向前搜索，以达到目标. 但当探索到某一步时，发现原先选择并不优或达不到目标，就退回一步重新选择，这种走不通就退回再走的技术为回溯法，而满足回溯条件的某个状态的点称为"回溯点". 回溯法在处理复杂数据结构方面，应用很广泛.

3. 递归法

为了描述问题的某一状态，必须用到它的上一状态，而描述上一状态，又必须用到它的上一状态，……，这种自己调用自己的方法，称为递归算法. 递归算法的实质是将较复杂的处理归结为较简单的处理，直到最简单的处理. 递归法在算法设计中占有十分重要的地位. 在数学中，也有许多概念是用递归来定义的，如斐波那契数列问题.

4. 迭代法

迭代法属于一种递推算法，它在数值计算中极为常见. 所谓迭代法，是指利用逐次逼近过程求解的一类数值方法. 同样的计算过程往往要多次进行，而每次都要以上次计算的结果代入计算公式. 如§3中的"药物残留量问题"计算结果或是越来越稳定在某一定小范围中——收敛，或是不趋于稳定——发散.

事实上，有些实际问题，既可以归纳为递推算法，又可以归纳为递归算法. 但递推与递归的实现方法是大不一样的. 递推是从初始条件出发，逐次推出所需求的结果；而递归则是从算法本身到达递归边界. 通常，递归算法要比递推算法更清晰易读，其结构也比较简练. 特别是在许多比较复杂的问题中，很难找到从初始条件推出所需结果的全过程，此时，设计递归算法要比递推算法容易得多. 但递归算法也有一个致命的缺点，即执行的效率比较低. 通常，递归最适用于写算法.

附录2

Algorithm一词的由来

Algorithm(算法)一词本身就十分有趣. 初看起来，这个词好像是某人打算要写"Logarithm"(对数)一词但却把头四个字母写的前后颠倒了. 这个词一直到1957年之前在Webster's New World Dictionary(《韦氏新世界词典》)中还未出现，我们只能找到带有它的古代含义的较老形式的"Algorism"(算术)，指的是用阿拉伯数字进行算术运算的过程. 在中世纪时，珠算家用算盘进行计算，而算术家用算术进行计算. 中世纪之后，对这个词的起源已经拿不准了，早期的语言学家试图推断它的来历，认为它是从把algiros(费力的)+arithmos(数字)组合起来派生而成的，但另一些人则不同意这种说法，认为这个词是从"喀斯迪尔国王Algor"派生而来的. 最后，数学史学家发现了algorism(算术)一词的真实起源：它来源于著名的Persian Textbook(《波斯教科书》)的作者的名字Abu Ja'far Mohammed ibn Mûsâ al Khowârizm——从字面上看，这个名字的意思是"Ja'far的父亲，Mohammed和Mûsâ的儿子，Khowârizm的本地人". Khowârizm是前苏联ХИВА(基发)的小城镇. Al-Khowârizm写了著名的书Kitab al jabr w'al-muqabala(《复原和化简的规则》)；另一个词，"algebra"(代数)，是从他的书的标题引出来的，尽管这本书实际上根本不是讲代数的. 逐渐地，"algorism"的形式和意义就变得面目全非了. 如牛津英语字典所说明的，这个词是由于同arithmetic(算术)相混淆而形成的错拼词，由algorism又变成algorithm. 一本早期的德文数学词典Vollstandiges Mathematisches Lexicon(《数学大全辞典》)，给出了Algorithmus(算法)一词的如下定义："在这个名称之下，组合了四种类型的算术计算的概念，即加、减、乘、除". 拉丁短语algorithmus infinitesimalis(无限小方法)，在当时就用来

表示 Leibnitz(莱布尼兹)所发明的以无限小量进行计算的微积分方法. 1950 年左右,algorithm 一词经常地同欧几里得算法(Euclid's algorithm)联系在一起. 这个算法就是在欧几里得的《几何原本》(Euclid's Elements,第Ⅶ卷,命题 i 和 ii)中所阐述的求两个数的最大公约数的过程(即辗转相除法).

在美国传统字典(双解)中解释为:算法,规则系统一种循序渐进解决问题的过程,尤指一种为在有限步骤内解决问题而建立的可重复应用的计算过程.

附录3

最近几年关于算法的学位论文

作者	学校	硕士学位论文	年度	导师
侯　彬	首都师范大学	《高中新课程中算法内容相关问题的研究》	2004	张景斌
彭爱辉	贵州师范大学	《高中数学课程中的算法及其教学设计研究》	2004	项　昭
聂　力	山东师范大学	《数学算法研究及教学分析》	2004	傅海伦
姚佩英	浙江师范大学	《数学教育中的算法研究》	2004	张维忠
薛　梅	苏州大学	数学新课程中"算法"教学的初步研究	2005	鲍建生
周恩超	华东师范大学	高中新课程"算法初步"学与教问题的相关研究	2006	陈月兰
王惠春	华东师范大学	《对普通高中学生算法的调查与研究》	2006	赵小平
陈国芳	东北师范大学	《高中数学新课程中算法教学现状的调查与分析》	2006	王晓辉
韩裕娜	华南师范大学	《高中数学新课程算法研究》	2006	傅海伦

第十一章　方程的精确解与近似解

方程在数学中是一个非常重要和基本的概念，从小学就开始接触，一直到大学和研究生阶段，对方程的研究和学习从来没有停止过。围绕方程，比较关注的是这个方程有没有解？若有解如何求？如果精确解很难求则是否可以求它的近似解？本章从微积分、数值计算角度对与中学关系比较紧密的实系数有理方程、超越方程以及复系数一元二次方程的解进行讨论，并介绍二分法、牛顿法等几种常用求方程近似解的方法（这里讨论的基本上是一元）。

§1　实系数整式方程

1.1　实根的存在性

定理 11.1　若 n 是奇数，则实系数方程 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$ 至少有一个实根.

证明　令 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1+a_0$，由 n 是奇数，得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^n\left(1+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$$

由极限的保号性，存在 $b<0$，$c>0$，使得 $f(b)<0$，$f(c)>0$，又因为 $f(x)$ 在 $[b,c]$ 上连续，由介值性定理，在 (b,c) 上至少存在一点 x_0，使 $f(x_0)=0$，即方程 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$ 至少有一个实根.

定理 11.2　若 n 为偶数，且 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1+a_0$，则 $f(x)$ 有最小值.

证明　设 $M=\max\{1,2n|a_{n-1}|,\cdots,2n|a_0|\}$，则对一切 $|x|\geqslant M$，有

$$\left|\frac{a_{n-k}}{x^k}\right|\leqslant\left|\frac{a_{n-k}}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2n},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right|\leqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\leqslant 1+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^n},$$

$$\frac{x^n}{2}\leqslant x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right)=f(x),$$

即当 $|x|\geqslant M$ 时，$f(x)\geqslant\frac{x^n}{2}\geqslant\frac{M^n}{2}\geqslant f(0)-a_0$；

当 $|x|\leqslant M$ 时，因为 $f(x)$ 在 $[-M,\ M]$ 上连续，由最大最小值定理，存在 $x_0\in[-M,\ M]$，使得对任意的 $x\in[-M,\ M]$，有 $f(x_0)\leqslant f(x)$，则当然有 $f(x_0)\leqslant f(0)$.

所以 $f(x)$ 有最小值. □

通过此定理，可以得出，对于偶次整式方程，若其对应的多项式的最小值小于等于0，则方程有实根，否则，无实根. 而对于多项式的最小值的求法，若要精确求出，通常采用求导后求驻点判断其单调性的方法，但这其实又化为一个整式方程的求根问题.

1.2 实根的性质

定义 11.1 设 $f_0(x)$ 使一个多项式，记 $f_1(x)=f_0'(x)$，将 $f_0(x)$ 除以 $f_1(x)$ 所得的余式变号后记为 $f_2(x)$，即 $f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x)$，依此类推，$f_{k-1}(x)$ 除以 $f_k(x)$，将所得余式变号后记为 $f_{k+1}(x)$，即 $f_{k-1}(x)=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x)$，称函数列 $\{f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_k(x),\ \cdots\}$ 为施笃姆函数列.

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根全为实数，假定 $a_0>0$，并写出方程的系数序列 $a_0,\ a_1,\ \cdots a_n$，去掉其中等于零的那些项. 如果余下的序列中相邻的两个符号相反那么就叫做一个变号. 变号数的总和叫做一个多项式的系数序列的变号数.

定理 11.3 （施笃姆定理）设 $f_0(x)$ 是无重根的多项式函数，$\{f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_n(x)\}$ 是施笃姆函数列，则 $f_0(x)$ 在 a 与 b 之间的实根的个数，等于 $\{f_i(a)\}$ 与 $\{f_i(b)\}$ 的变号数的差($i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n$).

证明 (1) 因为 $f_0(x)$ 无重根，所以 $f_0(x)$ 与 $f_1(x)$ 互素，即 $f_n(x)$ 是非零常

数，由 $f_{k-1}(x)=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x)$ 可得，任意的 x_0 不能使 $f_k(x_0)$，$f_{k+1}(x_0)$ 同时为零，否则将有 $f_n(x_0)=0$. 当 $f_k(x_0)=0$ 时，有

$$f_{k-1}(x_0)=q_k(x_0)f_k(x_0)-f_{k+1}(x_0)=-f_{k+1}(x_0),$$

所以当 $f_k(x_0)=0$ 时，必有 $f_{k-1}(x_0)$ 与 $f_{k+1}(x_0)$ 异号.

(2) 设 c 是 $f_k(x)$ 的一个根，因 $f_{k-1}(c)$ 与 $f_{k+1}(c)$ 不等于零且异号，所以存在 $\delta>0$，使 $f_{k-1}(x)$ 和 $f_{k+1}(x)$ 在 $[c-\delta, c+\delta]$ 上不变号，于是不管 $f_k(c\pm\delta)$ 的符号正负，$\{f_{k-1}(c-\delta), f_k(c-\delta), f_{k+1}(c-\delta)\}$ 和 $\{f_{k-1}(c+\delta), f_k(c+\delta), f_{k+1}(c+\delta)\}$ 的变号数都是 1.

(3) 若 $f_0(r)=0$，由 $f_0(x)$ 无重根可知，$f_0'(r)=f_1(r)\neq 0$，且当 $f_1(r)>0$ 时，$f_0(x)$ 在 r 附近递增，当 $f_1(r)<0$ 时，$f_0(x)$ 在 r 附近递减. 因此 $\{f_0(r-\delta), f_1(r-\delta)\}$ 的变号数是 1，$\{f_0(r+\delta), f_1(r+\delta)\}$ 的变号数是 0.

(4) 现在 x_0 由 a 开始向 b 变动，由上可见，在未经过函数列的任一函数的根时，$f_k(x)$ 都没有变号($k=0, 1, 2, \cdots n$)；当 x_0 经过 $f_k(x)$ $(k\neq 0)$ 的根 c 时，函数列的变号数保持不变；当 x_0 经过 $f_0(x)$ 的根 r 时，函数列的变号数减 1. 这就说明了 $\{f_0(a), f_1(a), \cdots, f_n(a)\}$ 的变号数和 $\{f_0(b), f_1(b), \cdots, f_n(b)\}$ 的变号数之间的差，恰好等于 $f_0(x)$ 在 a, b 之间实根的个数. □

例 1 求 $f_0(x)=x^3-x^2-10x+1$ 的实根个数和它们的位置.

解 $f_1(x)=f_0'(x)=3x^2-2x-10$，$f_2(x)=62x+1$，$f_3(x)=38\,313$，由表可见，方程有三个实根，且分别在区间 $[-3, -2]$，$[0, 2]$，$[2, 4]$ 内.

	$-k$	-3	-2	0	2	4	$+k$
f_0			+	+	−	+	+
f_1	+	+	+	−	−	+	+
f_2	−		−	+	+	+	+
f_3	+	+	+	+	+	+	+

由数学分析中的罗尔定理可以知道，如果方程 $f(x)=0$ 的一切根都是实根，则它的导数方程 $f'(x)=0$ 的根也全部是实根，在此前提下，如果 $f(x)=0$ 有 p 个正根，那么 $f'(x)=0$ 有 p 个或 $p-1$ 个正根.

笛卡儿给出了所有根都是实数的多项式确定正根的方法.

$f(x)$ 的正根个数就等于它的系数序列的变号数. 一般地说，如果多项式 $f(x)$ 的根都是实数，那么它在区间 (a, b) 中根的个数就是 $f(x+a)$ 的变号数减去 $f(x+b)$ 的变号数.

1.3 一元高次方程的求解

三次方程的塔尔塔利亚解法：

实系数的三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0), \tag{1.1}$$

令 $x=y-\frac{b}{3a}$，代入(1.1)化简后得到

$$y^3+py+q=0, \tag{1.2}$$

其中 $p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$，$q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$.

令 $y=u+v$，代入(1.2)，整理得到

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0, \tag{1.3}$$

令 $3uv+p=0$，即

$$uv=-\frac{p}{3}, \tag{1.4}$$

代入(1.3)，得到

$$u^3+v^3=-q, \tag{1.5}$$

由(1.4)和(1.5)，得到关于 u，v 的方程组 $\begin{cases}3uv+p=0,\\ u^3+v^3+q=0.\end{cases}$

由韦达定理，u^3 和 v^3 分别是二次方程 $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$ 的两个根，解得 $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$，$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$，注意到 u 和 v 要满足式(1.4)，所以在复数域中，u 和 v 的值为以下三组：

$$\begin{cases}u=u_1,\\ v=v_1,\end{cases}\quad \begin{cases}u=u_1\omega,\\ v=v_1\omega^2,\end{cases}\quad \begin{cases}u=u_1\omega^2,\\ v=v_1\omega,\end{cases}$$

其中，$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$，$v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

所以，方程(1.2)有三个解，它们是 $y_1=u_1+v_1$，$y_2=u_1\omega+v_1\omega^2$，$y_3=u_1\omega^2+$

$v_1\omega$，因此可以得到原方程的解.

下面我们对三次方程的根作一些讨论. 二次方程的根是通过它的判别式来讨论的，由上述三次方程根的推导过程，我们类似地引入三次方程的判别式 $D = \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$.

(1) 当 $D>0$ 时，u^3 和 v^3 是不相等的两实数，方程(1.2)有一个实根和两个共轭虚根，即

$$y_1 = u_1 + v_1,$$

$$y_2 = u_1\omega + v_1\omega^2 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1),$$

$$y_3 = u_1\omega^2 + v_1\omega = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1);$$

(2) 当 $D=0$ 时，这时 $u^3 = v^3 = -\frac{q}{2}$，方程(1.2)有三个实根，并且有两个根相等，即

$$y_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},\ y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}};$$

(3) 当 $D<0$，

$$|u| = \left|\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right| = \sqrt[3]{\left|-\frac{q}{2}+\mathrm{i}\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right|}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

下面证明 u 和 v 共轭，

$$v = -\frac{p}{3u} = -\frac{p\bar{u}}{3u\bar{u}} = -\frac{p\bar{u}}{3|u|^2} = \bar{u},$$

设 $u_1 = s+\mathrm{i}t$ 是 u 的任意一个值，则 $v_1 = s-\mathrm{i}t$，因此

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2s,$$

$$y_2 = u_1\omega + v_1\omega^2 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1) = -s-t\sqrt{3},$$

$$y_3 = u_1\omega^2 + v_1\omega = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1) = -s+t\sqrt{3},$$

为三个互异的实根.

例 2　解方程：$x^3-3x^2-3x+11=0$

解：令 $x=y+1$ 得

$$y^3-6y+6=0. \qquad ①$$

由三次方程求根公式，解得 $u^3=-2$，$v^3=-4$

取 $u_1=-\sqrt[3]{2}$，$v_1=-\sqrt[3]{4}$，得方程 ① 的三个根是

$$\begin{aligned}
y_1&=u_1+v_1=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\\
y_2&=u_1\omega+v_1\omega^2\\
&=-\sqrt[3]{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\mathrm{i},\\
y_3&=u_1\omega^2+v_1\omega\\
&=-\sqrt[3]{2}\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

从而原方程的三个根是

$$\begin{aligned}
x_1&=y_1+1=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1,\\
x_2&=y_2+1=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\mathrm{i},\\
x_3&=y_3+1=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2)-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

四次方程的解法：

1. 类似于三次方程的解法，先把四次方程转换为缺项的四次方程，再将缺项的四次方程转换为三次方程，解出三次方程后，再求出四次方程的根.

设一元四次方程为

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (a\neq 0), \qquad (1.6)$$

令 $x=y-\dfrac{b}{4a}$，代入(1.6)化简后得到

$$y^4+qy^2+ry+s=0, \qquad (1.7)$$

令 $y=u+v+w$，于是有

$$y^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu),$$

$$y^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + vw + wu) + 4(uv + vw + wu)^2,$$

代入(1.7)整理得到

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 2(uv + vw + wu)[2(u^2 + v^2 + w^2) + q] +$$
$$q(u^2 + v^2 + w^2) + (8uvw + r)(u + v + w) + 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + s = 0, \tag{1.8}$$

令 $2(u^2+v^2+w^2)+q=0$,即

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{q}{2}, \tag{1.9}$$

令 $8uvw + r = 0$,即

$$uvw = -\frac{r}{8}, \tag{1.10}$$

代入(1.8)得到

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = \frac{q^2 - 4s}{16}, \tag{1.11}$$

由(1.9)、(1.10)、(1.11)可知,u^2, v^2 和 w^2 是三次方程

$$z^3 + \frac{q}{2}z^2 + \frac{q^2 - 4s}{16}z - \frac{r^2}{64} = 0$$

的根.若三个根分别是 z_1, z_2 和 z_3,则 $u = \pm\sqrt{z_1}$, $v = \pm\sqrt{z_2}$, $w = \pm\sqrt{z_3}$,由于(1.10)的限制,$y = u + v + w$ 只有四种结合的情况,这就是四次方程的四个根.

2. 四次方程的费拉里解法

考虑方程 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的解,经过配方,原方程改写成

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d\right] = 0. \tag{1.12}$$

对方程(1.12)左边的 $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2$ 和方括号内同时加上一个含有参数 t 的多项式 $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)t + \frac{t^2}{4}$,得

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{t}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} - b + t\right)x^2 + \left(\frac{at}{2} - c\right)x + \left(\frac{t^2}{4} - d\right)\right] = 0, \tag{1.13}$$

选取适当的 t，使方程(1.13)左边方括号内成为一个完全平方式，当且仅当 t 满足

$$\left(\frac{at}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+t\right)\left(\frac{t^2}{4}-d\right)=0,$$

即

$$t^3-bt^2+(ac-4d)t-a^2d+4bd-c^2=0, \tag{1.14}$$

方程(1.14)是一个三次方程，可由上面的方法求解，设 t_0 是它的任一根，则方程(1.13)可变形为

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t_0}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\cdot x+\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right)^2=0, \tag{1.15}$$

则方程(1.15)同解于下面两个二次方程：

$$x^2+\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\right)x+\left(\frac{t_0}{2}+\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right)=0, \tag{1.16}$$

$$x^2+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\right)x+\left(\frac{t_0}{2}-\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right)=0. \tag{1.17}$$

解方程(1.16)和(1.17)，就可得到原方程的四个根.

对于五次及五次以上的方程的求解问题，伽罗瓦利用根的置换群的概念给出了方程可用代数法求解的判别准则，同时也证明了不能用代数法求解的方程的存在，这个问题得到了彻底的解决.

1.4 倒数方程

定义 11.2 在一元整式方程 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ $(a_n\neq 0)$ 中，如果与首末两端等距离的项的系数相等或互为相反数，那么这种方程叫做倒数方程.

倒数方程没有零根. 因为如果 $f(0)=0$，就有 $a_n=a_0=0$，矛盾.

倒数方程中，如果 α 是方程的根，那么 $\frac{1}{\alpha}$ 也是方程的根. 事实上，

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{\alpha}\right)&=a_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)+a_0\\&=\frac{1}{\alpha^n}(a_n+a_{n-1}\alpha+\cdots+a_1\alpha^{n-1}+a_0\alpha^n).\end{aligned}$$

由定义可知，倒数方程有四种类型：

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^n}f(\alpha)=0,$$

或

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^{n}}[-f(\alpha)]=0.$$

(1) n 为偶数,对任何 i,有 $a_i=a_{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n)$.

设 $n=2k$,

$$a_0x^{2k}+a_1x^{2k-1}+\cdots+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0=0(a_0\neq 0)\ ,\qquad(1.18)$$

在(1.18)的两端同时除以 x^k,得

$$a_0\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)+a_1\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)+\cdots+a_k=0.\qquad(1.19)$$

令 $y=x+\dfrac{1}{x}$,则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y.$$

一般有 $x^{p+1}+\dfrac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\dfrac{1}{x^p}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\dfrac{1}{x^{p-1}}\right)$,将以上各式代入(1.19),就得到一个关于 y 的 k 次方程,解这个方程,得到 y 的 k 个值,对于每个 y 值,可从 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 求出相应的 x 的值.

例3 解方程 $3x^6-2x^5+6x^4-2x^3+6x^2-2x+3=0$.

解 将方程变形为

$$3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0,$$

令 $y=x+\dfrac{1}{x}$,得

$$3(y^3-3y)-2(y^2-2)+6y-2=0,$$

即

$$3y^3-2y^2-3y+2=0,$$

解得 $y_1=1,\ y_2=-1,\ y_3=\dfrac{2}{3}$.

由 $y_1=1$,得 $x^2-x+1=0$,所以 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$;

由 $y_2=-1$，得 $x^2+x+1=0$，所以 $x_3=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$x_4=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$；

由 $y_3=\frac{2}{3}$，得 $3x^2-2x+3=0$，所以 $x_5=\frac{1+2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3}$，$x_6=\frac{1-2\sqrt{2}\mathrm{i}}{3}$.

(2) n 为奇数，对任何 i，有 $a_i=a_{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n)$.

设 $n=2k+1$，

$$f(x)=a_0x^{2k+1}+a_1x^{2k}+\cdots+a_kx^{k+1}+a_kx^k\cdots+a_1x+a_0=0\ (a_0\neq 0),$$

整理得，

$$f(x)=a_0(x^{2k+1}+1)+a_1(x^{2k}+x)+\cdots+a_k(x^{k+1}+x^k)=0,$$

显然，$x+1$ 是 $f(x)$ 的因式，以 $x+1$ 除 $f(x)$ 所得的商式为 $q(x)$，而 $q(x)=0$ 为上述第一类的偶次倒数方程，于是解原方程可以转化为解一个一次方程 $x+1=0$ 和一个第一类偶次倒数方程 $q(x)=0$.

(3) n 为偶数，对任何 i，有 $a_i=-a_{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n)$.

设 $n=2k$，因为 $a_k=-a_{n-k}=-a_k$，所以 $a_k=0$，因此

$$f(x)=a_0x^{2k}+a_1x^{2k-1}+\cdots+a_{k-1}x^{k+1}-a_{k-1}x^{k-1}-\cdots-a_1x-a_0=0\ (a_0\neq 0),$$

整理得，

$$f(x)=a_0(x^{2k}-1)+a_1(x^{2k-1}-x)+\cdots+a_{k-1}(x^{k+1}-x^{k-1})=0,$$

显然，x^2-1 是 $f(x)$ 的因式，以 x^2-1 除 $f(x)$ 所得的商式为 $q(x)$，而 $q(x)=0$ 为上述第一类的偶次倒数方程，于是解原方程可以转化为解一个二次方程 $x^2-1=0$ 和一个第一类偶次倒数方程 $q(x)=0$.

(4) n 为奇数，对任何 i，有 $a_i=-a_{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n)$.

设 $n=2k+1$，

$$f(x)=a_0x^{2k+1}+a_1x^{2k}+\cdots+a_kx^{k+1}-a_kx^k-\cdots-a_1x-a_0=0\ (a_0\neq 0),$$

整理得，

$$f(x)=a_0(x^{2k+1}-1)+a_1(x^{2k}-x)+\cdots+a_k(x^{k+1}-x^k)=0,$$

显然，$x-1$ 是 $f(x)$ 的因式，以 $x-1$ 除 $f(x)$ 所得的商式为 $q(x)$，而 $q(x)=0$ 为上述第一类的偶次倒数方程，于是解原方程可以转化为解一个一次方程 $x-1=0$ 和一个第一类偶次倒数方程 $q(x)=0$.

从以上的讨论可知，求解倒数方程的核心思想就是降次，四种类型的倒数方程中，第一类型的偶次倒数方程是最基本的，其余三类都可以转化成它.

对于某些方程，从系数上看，不符合上面讨论的四种类型，但与倒数方程又有

相似的地方，可以用类似于倒数方程的解法来求解，如下例：

例4 求 $x^8-x^7-11x^6+4x^5+26x^4-4x^3-11x^2+x+1=0$ 的根.

解 将原方程变形为

$$(x^8+1)-(x^7-x)-11(x^6+x^2)+4(x^5-x^3)+26x^4=0,$$

显然 $x=0$ 不是此方程的根，两边同除以 x^4，得

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-11\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x-\frac{1}{x}\right)+26=0.$$

令 $y=x-\frac{1}{x}$，则

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2,$$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)=y^3+3y,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=y^4+4y^2+2,$$

于是，原方程整理后为

$$y^4-y^3-7y^2+y+6=0,$$

解此方程，得 $y_1=1$，$y_2=-1$，$y_3=3$，$y_4=-2$，再由 $y=x-\frac{1}{x}$，可得原方程的根为 $x_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$x_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$，$x_3=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$x_4=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$，$x_5=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$，$x_6=\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$，$x_7=-1+\sqrt{2}$，$x_8=-1-\sqrt{2}$.

§2 实系数分式方程和无理方程

求解分式方程的基本思想，主要是通过去分母把分式方程转化为整式方程，往往会有增根或失根，需要验根.

例5 解方程 $\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}=\frac{2x^2+3x+1}{2x^2-3x+1}$.

解 利用合分比定理，并化简，原方程可变形为

$$\frac{x^2+2}{3x}=\frac{2x^2+1}{3x}.$$

去分母，解得 $x=\pm1$，经检验，$x=-1$ 是原方程的根，$x=1$ 是增根，$x=0$ 是失根.

利用合分比定理解分式方程的增根和失根情况如下：

方程

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \tag{2.1}$$

与方程

$$\frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_1(x)-g_1(x)}=\frac{f_2(x)+g_2(x)}{f_2(x)-g_2(x)}, \tag{2.2}$$

(1) 在 $g_1(x)$，$g_2(x)$，$f_1(x)-g_1(x)$，$f_2(x)-g_2(x)$ 都不为零时，方程(2.1)和(2.2)同解；

(2) 使 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 都不为零，而使 $f_1(x)-g_1(x)$，$f_2(x)-g_2(x)$ 都为零的 x 值，是方程(2.1)的解而不是方程(2.2)的解；

(3) 使 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 都为零，而使 $f_1(x)-g_1(x)$，$f_2(x)-g_2(x)$ 都不为零的 x 值，是方程(2.2)的解而不是方程(2.1)的解.

求解无理方程，通常都是在实数集上进行的.解题的基本思想，在于通过适当的变形，把无理方程转化为有理方程，但往往会产生增根，需要验根.

例6 解方程：

$$\sqrt{2x^2-7x+1}-\sqrt{2x^2-9x+4}=1. \tag{2.3}$$

解

$$(\sqrt{2x^2-7x+1})^2-(\sqrt{2x^2-9x+4})^2=2x-3, \tag{2.4}$$

(2.4)÷(2.3)得

$$\sqrt{2x^2-7x+1}+\sqrt{2x^2-9x+4}=2x-3, \tag{2.5}$$

(2.3)+(2.5)得

$$\sqrt{2x^2-7x+1}=x-1, \tag{2.6}$$

解方程(2.6)，得 $x_1=5,x_2=0$.

经检验，$x_1=5$ 是原方程的根，$x_2=0$ 是增根.

§3 实系数指数方程和对数方程

例7 解方程 $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot2^{\sqrt{x+1}}$.

解 原方程等价于方程

$$2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{6+\sqrt{x+1}},$$

则

$$2\sqrt{x+1} = 6 + \sqrt{x+1},$$
$$x = 35.$$

经检验，$x = 35$ 是原方程的解.

例8 解方程 $\lg x^2 + \lg x^4 - 6 = 0$.

解 如果将它变形为 $\lg x^2 + 2\lg x^2 - 6 = 0$，求得解为 $x = \pm 10$，那么既没有增根，也没有失根，因为变形后的方程与原方程的定义域是一致的，如果将它变形为 $2\lg x + 4\lg x - 6 = 0$，求得解为 $x = 10$，就遗失了 $x = -10$ 这个解，因为原方程的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，而变形后的方程的定义域是 $(0, +\infty)$.

§4 复系数一元二次方程根的讨论

1. 复系数一元二次方程

$$z^2 + (a+bi)z + (c+di) = 0 \ (a,\ b,\ c,\ d \text{ 为实数}),$$

有两实根的充要条件是 $b = d = 0$，且 $a^2 - 4c \geqslant 0$.

证 充分性是显然的.

必要性：设 z_1 和 z_2 是方程的两个实根，则

$$z_1^2 + (a+bi)z_1 + (c+di) = 0,$$
$$z_2^2 + (a+bi)z_2 + (c+di) = 0,$$

即

$$(z_1^2 + az_1 + c) + (bz_1 + d)i = 0,$$
$$(z_2^2 + az_2 + c) + (bz_2 + d)i = 0,$$

由复数相等定义得

$$\begin{cases} z_1^2 + az_1 + c = 0, \text{且 } bz_1 + d = 0, \\ z_2^2 + az_2 + c = 0, \text{且 } bz_2 + d = 0. \end{cases}$$

因为 $bz + d = 0$ 是关于 z 的一次方程，而有 z_1 和 z_2 两个根，这只有在 $b = d = 0$ 时才成立. 此时原方程变为

$$z^2+az+c=0,$$

它有两个实根的充要条件为 $a^2-4c\geqslant 0$.

因此,如果一元二次方程的系数中有虚数,就不可能有两个实根.

2. 复系数一元二次方程

$$z^2+(a+bi)z+(c+di)=0\ (a,\ b,\ c,\ d\ 为实数),$$

只有一个实根的充要条件是 $b\neq 0$ 且 $d^2-abd+b^2c=0$.

证 先证必要性. 设 z_0 是方程的唯一实根,则

$$(z_0^2+az_0+c)+(bz_0+d)i=0,$$
$$z_0^2+az_0+c=0,\ bz_0+d=0,$$

若 $b=d=0$, 则方程为实系数二次方程,它或者有两实根或者没有实根,这与题中只有一个实根相矛盾,所以 b 与 d 中至少有一个不为零,因而方程 $bz+d=0$ 的根不会多于一个,由于 $bz_0+d=0$,所以 $b\neq 0$, 且 z_0 是方程的唯一实根,于是 $z_0=-\dfrac{d}{b}$, 代入 $z_0^2+az_0+c=0$ 得

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^2+a\left(-\frac{d}{b}\right)+c=0,$$

即 $d^2-abd+b^2c=0$.

充分性:设 $b\neq 0$ 且 $d^2-abd+b^2c=0$, 于是

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^2+a\left(-\frac{d}{b}\right)+c=0,$$

又 $b\left(-\dfrac{d}{b}\right)+d=0$, 所以

$$\left[\left(-\frac{d}{b}\right)^2+a\left(-\frac{d}{b}\right)+c\right]+\left[b\left(-\frac{d}{b}\right)+d\right]i=0,$$

即

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^2+(a+bi)\left(-\frac{d}{b}\right)+(c+di)=0,$$

所以 $z_0=-\dfrac{d}{b}$ 是方程的实根.

设 z_0' 也是方程的实根,即

$$(z_0'^2+az_0'+c)+(bz_0'+d)i=0$$

由此得到 $bz_0'+d=0$,因而 z_0 与 z_0' 都满足方程 $bz+d=0$,从而就有 $b=d=0$,

矛盾.因此方程只有一个实根.

复系数一元二次方程根的情况如下表:

$b=d=0$ 且 $a^2-4c\geqslant 0$	两实根
$b=d=0$ 且 $a^2-4c<0$	两共轭虚根
$b\neq 0$ 且 $d^2-abd+b^2c=0$	一实根,一虚根
$b\neq 0$ 且 $d^2-abd+b^2c\neq 0$ 或 $b=0$ 且 $c\neq 0$	两不共轭虚根

§5 用数值方法求方程的近似根

5.1 二分法

计算 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 端点处的值 $f(a)$, $f(b)$,计算 $f(x)$ 在区间中点 $\frac{a+b}{2}$ 处的值 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. 若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$,则 $\frac{a+b}{2}$ 即是根;若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(a)<0$,则以 $\frac{a+b}{2}$ 代替 b,否则以 $\frac{a+b}{2}$ 代替 a. 反复进行下去,直到区间 $[a, b]$ 的长度小于允许误差 ε,此时中点 $\frac{a+b}{2}$ 即为所求近似根.

反复二分,可得出一系列有根区间 $[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset\cdots\supset[a_k, b_k]\supset\cdots$,其中每个区间都是前一个区间的一半,因此当 $k\to\infty$ 时,$[a_k, b_k]$ 的长度 $b_k-a_k=\frac{(b-a)}{2^k}$ 趋于零,由闭区间套定理,如果二分过程无限地进行下去,这些区间最终必收缩于一点 x^*,该点显然就是所求的根.

二分法的优点是算法简单,且总是收敛,缺点是收敛太慢.

5.2 不动点迭代法

将方程 $f(x)=0$ 改写成等价的形式

$$x=\varphi(x), \tag{5.1}$$

若要求 x^* 满足 $f(x^*)=0$,则 $x^*=\varphi(x^*)$,反之亦然,称 x^* 为函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点,求 $f(x)$ 的零点就等价于求 $\varphi(x)$ 的不动点,选择一个初始近似值 x_0,将它代入(5.1)式右端,即可求得 $x_1=\varphi(x_0)$,如此反复迭代计算

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{5.2}$$

如果对任何 $x_0 \in [a, b]$,由(5.2)式得到的序列$\{x_k\}$有极限$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,则称迭代方程(5.2)收敛,且 $x^* = \varphi(x^*)$ 为 $\varphi(x)$ 的不动点.

这种迭代法是一种逐次逼近法,其基本思想是将隐式方程(5.1)归结为一组显式的计算公式(5.2),就是说,迭代过程实质上是一个逐步显示化的过程.

迭代法的效果并不是总能令人满意的,原方程化为(5.1)式的形式不同,所产生的迭代序列也不同,有的收敛,有的发散,下面研究 $\varphi(x)$的不动点的存在性及迭代法(5.2)的收敛性.

定理 11.4 设 $\varphi(x) \in C[a, b]$ 满足以下两个条件:

(1) 对任意 $x \in [a, b]$ 有 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$;

(2) 存在正常数 $L < 1$,使对任意 $x, y \in [a, b]$ 都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L\,|x - y|, \tag{5.3}$$

则 $\varphi(x)$在$[a, b]$上存在唯一的不动点 x^*.

证明 先证不动点的存在性.若 $\varphi(a) = a$ 或 $\varphi(b) = b$,显然 $\varphi(x)$ 在$[a, b]$上存在不动点.下面设 $\varphi(a) > a$ 及 $\varphi(b) < b$,定义函数

$$f(x) = \varphi(x) - x,$$

显然 $f(x) \in C[a, b]$,且满足 $f(a) = \varphi(a) - a > 0$, $f(b) = \varphi(b) - b < 0$,由连续函数性质可知存在 $x^* \in [a, b]$,使 $f(x^*) = 0$,即 $x^* = \varphi(x^*)$, x^* 即为 $\varphi(x)$ 的不动点.

再证唯一性.设 x_1^* 和 x_2^* 都是 $\varphi(x)$ 的不动点,则由(5.3)式得

$$|x_1^* - x_2^*| = |\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)| \leqslant L\,|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|,$$

矛盾.故 $\varphi(x)$的不动点唯一.

在 $\varphi(x)$的不动点存在唯一的情况下,可得到迭代法收敛的一个充分条件.

定理 11.5 设 $\varphi(x) \in C[a, b]$满足定理11.4中的两个条件,则对任意 $x_0 \in [a, b]$,迭代序列$\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*.

证 设 $x^* \in [a, b]$是$\varphi(x)$在$[a, b]$上的唯一不动点,由定理中的条件(1)可知$\{x_k\} \in [a, b]$,再由(5.3)式得

$$|x_k - x^*| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \leqslant L\,|x_{k-1} - x^*| \leqslant \cdots \leqslant L^k\,|x_0 - x^*|,$$

因 $0 < L < 1$,故当 $k \to \infty$ 时序列$\{x_k\}$ 收敛到 x^*.

在实际使用上述定理时,对于条件(2),往往用 $|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$ 来代替.事实上,如果 $\varphi(x) \in C^1[a, b]$,由中值定理可知,对 $\forall x, y \in [a, b]$ 有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|\varphi'(\xi)(x-y)|\leqslant L|x-y|, \xi\in(a, b).$$

上面给出了 x_0 取自区间$[a, b]$上时所产生的迭代序列$\{x_k\}$的收敛性，通常称为全局收敛性. 有时不易检查定理的条件，实际应用时通常只在不动点 x^* 的邻近考察其收敛性，即局部收敛性.

定义 11.3 设 $\varphi(x)$有不动点 x^*，如果存在 x^* 的某个邻域U：$|x-x^*|\leqslant\delta$，对任意 $x_0\in U$，迭代法(5.2) 产生的序列$\{x_k\}\in U$，且收敛到 x^*，则称迭代法(5.2) 局部收敛.

为了衡量迭代法(5.2)收敛速度的快慢给出如下定义：

定义 11.4 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，如果当 $k\to\infty$ 时迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 满足渐近关系式

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}\to C,$$

其中 $p\geqslant 1$. 则称迭代过程 p 阶收敛，当 $p=1$(这时 $0<C<1$) 时称为线性收敛；当 $p>1$ 时称为超线性收敛；当 $p=2$ 时称为二次收敛. 称该迭代过程是 p 阶收敛的.

对于收敛的迭代过程，只要迭代次数足够多，就可以使结果达到任意的精度，但有时迭代过程收敛缓慢，从而使计算量变得很大，下面两种方法(埃特金加速方法和斯特芬森迭代法)就是研究迭代过程的加速方法.

埃特金加速收敛方法

设 x_0 是根 x^* 的某个近似值，用迭代公式迭代一次得

$$x_1=\varphi(x_0),$$

而由微分中值定理，有

$$x_1-x^*=\varphi(x_0)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi)(x_0-x^*),$$

其中 ξ 介于 x^* 与 x_0 之间.

假定 $\varphi'(x)$改变不大，近似地取某个近似值 L，则有

$$x_1-x^*\approx L(x_0-x^*). \tag{5.4}$$

若将校正值 $x_1=\varphi(x_0)$ 再迭代一次，又得

$$x_2=\varphi(x_1),$$

由于

$$x_2-x^*\approx L(x_1-x^*),$$

将它与(5.4)联立,消去未知的 L,有

$$\frac{x_1-x^*}{x_2-x^*}\approx\frac{x_0-x^*}{x_1-x^*},$$

由此推知

$$x^*\approx\frac{x_0x_2-x_1^2}{x_2-2x_1+x_0}=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}.$$

在计算了 x_1 及 x_2 之后,可用上式右端作为 x^* 的新近似值,记作 $\overline{x}_1$. 一般情形是

$$\overline{x}_{k+1}=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_k-2x_{k+1}+x_{k+2}}=x_k-\frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k},\ k=0,\ 1,\ \cdots.\qquad(5.5)$$

(5.5)式称为埃特金(Aitken)Δ^2 加速方法.

可以证明

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\overline{x}_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=0.$$

它表明序列 $\{\overline{x}_k\}$ 的收敛速度比 $\{x_k\}$ 的收敛速度要快.

斯特芬森迭代法

埃特金方法不管原序列 $\{x_k\}$ 是怎样产生的,对 $\{x_k\}$ 进行加速计算,得到序列 $\{\overline{x}_k\}$. 如果把埃特金加速技巧与不动点迭代结合,则可得到如下的迭代法:

$$\begin{cases}y_k=\varphi(x_k),\ z_k=\varphi(y_k),\\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k},\end{cases}k=0,\ 1,\ \cdots,\qquad(5.6)$$

称为斯特芬森迭代法. 它可以这样理解,我们要求 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*,令 $\varepsilon(x)=\varphi(x)-x$, $\varepsilon(x^*)=\varphi(x^*)-x^*=0$,已知 x^* 的近似值 x_k 及 y_k,其误差分别为

$$\varepsilon(x_k)=\varphi(x_k)-x_k=y_k-x_k,$$
$$\varepsilon(y_k)=\varphi(y_k)-y_k=z_k-y_k,$$

把误差 $\varepsilon(x)$"外推到零",即过 $(x_k,\ \varepsilon(x_k))$ 及 $(y_k,\ \varepsilon(y_k))$ 两点做线性插值函数,它与 x 轴的交点就是(5.6)中的 x_{k+1},即方程

$$\varepsilon(x_k)+\frac{\varepsilon(y_k)-\varepsilon(x_k)}{y_k-x_k}(x-x_k)=0$$

的解.

$$x=x_k-\frac{\varepsilon(x_k)}{\varepsilon(y_k)-\varepsilon(x_k)}(y_k-x_k)=x_k-\frac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k}=x_{k+1}.$$

实际上(5.6)是将不动点迭代法(5.2)计算两步合并成一步得到的,可将它写成另一种不动点迭代

$$x_{k+1} = \psi(x_k),\ k = 0,\ 1,\ \cdots,$$

其中

$$\psi(x) = x - \frac{[\varphi(x) - x]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}. \tag{5.7}$$

定理 11.6 若 x^* 为(5.7)式定义的迭代函数 $\psi(x)$ 的不动点,则 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点.反之,若 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点,设 $\varphi''(x)$ 存在,$\varphi'(x^*) \neq 1$,则 x^* 是 $\psi(x)$ 的不动点,且斯特芬森迭代法是二阶收敛的.

进一步还可知,若迭代法(5.2)是 p 阶收敛的,则迭代法(5.6)是 $p+1$ 阶收敛的.

5.3 牛顿法

设已知方程 $f(x)=0$ 有近似根 x_k(假定 $f'(x_k)\neq 0$),将函数 $f(x)$ 在点 x_k 展开,有

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

于是方程 $f(x) = 0$ 可近似地表示为

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0,$$

这是个线性方程,记其根为 x_{k+1},则 x_{k+1} 的计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

牛顿法实质上是一种线性化方法,其基本思想是将非线性方程 $f(x)=0$ 逐步归结为某种线性方程来求解.

牛顿法有明显的几何解释.方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 可解释为曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标.设 x_k 是根 x^* 的某个近似值,过曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为 x_k 的点 P_k 引切线,并将该切线与 x 轴的交点的横坐标 x_{k+1} 作为 x^* 的新的近似值.注意到切线方程为

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

由于这种几何背景,牛顿法亦称切线法.

牛顿法的优点是收敛快,缺点一是每步迭代要计算 $f(x_k)$ 及 $f'(x_k)$,计算量大且有时 $f'(x_k)$ 计算较困难;二是初始近似 x_0 只在根 x^* 附近才能保证收敛,如 x_0

给的不合适可能不收敛. 为克服这两个缺点,通常可用下述方法.

(1) **简化牛顿法**,也称平行弦法. 其迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - Cf(x_k)\ ,\ C \neq 0,$$

迭代函数 $\varphi(x) = x - Cf(x)$.

取 $C = \frac{1}{f'(x_0)}$,则称为简化牛顿法,这类方法计算量省,但收敛慢,其几何意义是用斜率为 $f'(x_0)$的平行弦与 x 轴的交点作为 x^* 的近似值.

(2) **牛顿下山法**

牛顿法的收敛性依赖于初值 x_0 的选择,为了防止迭代发散,我们对迭代过程再附加一项要求,即具有单调性

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|, \tag{5.8}$$

满足这项要求的算法称为下山法.

我们将牛顿法与下山法结合起来用,即在下山法保证函数值稳定下降的前提下,用牛顿法加快收敛速度. 为此,我们将牛顿法的计算结果 $\overline{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 与前一步的近似值 x_k 的适当加权平均作为新的改进值

$$x_{k+1} = \lambda\overline{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k,$$

其中 $\lambda(0 < \lambda \leqslant 1)$ 称为下山因子,则

$$x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

称为牛顿下山法. 选择下山因子时从 $\lambda = 1$ 开始,逐次将 λ 减半进行试算,直到能使下降条件(5.8)成立为止.

为了克服牛顿法中计算 $f'(x_k)$ 的复杂性,除了用简化牛顿法以外,还可以利用已求函数值 $f(x_k)$, $f(x_{k-1})$, … 来回避导数值 $f'(x_k)$ 的计算. 这类方法是建立在插值原理基础上的.

(3) **弦截法**

设 x_k, x_{k-1} 是 $f(x) = 0$ 的近似根,我们利用 $f(x_k)$, $f(x_{k-1})$ 构造一次插值多项式 $p_1(x)$,并用 $p_1(x) = 0$ 的根作为 $f(x) = 0$ 的新的近似根 x_{k+1},由于

$$p_1(x) = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k),$$

因此有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}). \tag{5.9}$$

这样导出的迭代公式可以看作牛顿公式中的导数 $f'(x_k)$ 用差商 $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 取代的结果.

现在解释这种迭代过程的几何意义. 曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为 x_k, x_{k-1} 的点分别记为 P_k, P_{k-1},则所求得的 x_{k+1} 实际上是弦线 P_kP_{k-1} 与 x 轴的交点的横坐标. 这种算法因此被称为弦截法.

弦截法与牛顿法都是线性化方法,但两者有本质的区别. 牛顿法在计算 x_{k+1} 时只用到前一步的值 x_k,而弦截法要用到前面两步的结果 x_k, x_{k-1},因此使用这种方法必须先给出两个初始值.

定理 11.7 假设 $f(x)$ 在根 x^* 的邻域 U: $|x-x^*|\leqslant\delta$ 内具有二阶连续导数,且对任意 $x\in U$ 有 $f'(x)\neq 0$,又初值 x_0, $x_1\in U$,那么当邻域 U 充分小时,弦截法(5.9)将按 $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 收敛到根 x^*.

(4) **抛物线法**

设已知方程 $f(x)=0$ 的三个近似根 x_k, x_{k-1}, x_{k-2},以这三点为节点构造二次插值多项式 $p_2(x)$,并适当选取 $p_2(x)$ 的一个零点 x_{k+1} 作为新的近似根,这样确定的迭代过程称为抛物线法,亦称为密勒法.

现在推导抛物线法的计算公式. 插值多项式

$$p_2(x)=f(x_k)+f[x_k, x_{k-1}](x-x_k)+f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x-x_k)(x-x_{k-1}),$$

有两个零点

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{\omega\pm\sqrt{\omega^2-4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}, \tag{5.10}$$

式中

$$\omega=f[x_k, x_{k-1}]+f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k, x_{k-1}),$$

为了从(5.10)式中定出一个值 x_{k+1},需要讨论根式前面正负号的取舍问题.

在 x_k, x_{k-1}, x_{k-2} 三个近似根中,自然假定 x_k 更接近所求的根 x^*,这时,为了保证精度,我们选取(5.10)式中较接近 x_k 的一个值作为新的近似根 x_{k+1}. 为此,只要取根式前的符号与 ω 的符号相同.

可以证明,在一定的条件下,抛物线法收敛的阶 $p=1.840$(是方程 $\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1=0$ 的根).

即使 x_k, x_{k-1}, x_{k-2} 均为实数,x_{k+1} 也可以是复数,所以抛物线法适用于求多项式的实根和复根.

本章思考题

1. 求方程 $\lg(x-a)-\lg 2=\frac{1}{2}\lg(x-b)$ 的实数解，其中 a, b 为参数.

2. 证明方程 $x^5-x^2-4=0$ 至少有一实根，并用两分法求精确到小数三位的根.

3. 对于初始值 $x_0=2$ 利用牛顿法求 $x^3-2x-5=0$ 的近似根 x_2.

本章参考文献

[1] 张奠宙，张广祥. 中学代数研究[M]. 高等教育出版社，2006.

[2] 张奠宙，邹一心. 现代数学与中学数学[M]. 上海教育出版社，1990.

[3] 赵振威. 中学数学教材教法(修订二版)第二分册　初等代数研究[M]. 华东师范大学出版社，2005.

[4] 江苏省高师数学教育研究组. 初等代数研究[M]. 江苏教育出版社，1988.

[5] 李庆扬，王能超，易大义. 数值分析(第五版)[M]. 清华大学出版社，2008.

第十二章　数列与差分

随着信息技术的日益普及和发展，离散数学的应用越来越广泛. 差分和差分方程是描述离散变量变化的重要工具，在理论上是十分重要的，并且有广泛的应用. 本章中我们先复习数列的概念和常用数列，然后引入差分的概念与性质、差分方程，最后介绍差分方程的应用，以培养学生能使用一些离散变量分析与解决问题的方法.

§1　数列的差分

1.1　数列

课本中数列概念为：按照一定的规则排列起来的一列数 a_1，a_2，$\cdots a_n$，$\cdots$称为数列，用符号$\{a_n\}$表示.

而数列的实质为：一个数列是一个函数，其定义域为全体正整数（有时，为方便计，是全体非负整数集合），其值域包含于全体实数集.

给定数列的方式有：

(1) 说明式给出数列，它的特点是数列不唯一确定. 比如：

$$1,\ 2,\ 3,\ 26,\ 676,\ \cdots$$

(2) 用通项公式给出数列，比如：

$$a_n = 2n + 1,\ n \in \mathbf{N}^*.$$

(3) 利用递推公式给出数列，比如：斐波那契数列

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots \end{cases}$$

(4) 用其他方式给出数列，比如：给出数列的前 n 项和，或用描点法直观的

表达.

关于数列通项,有几点我们需要注意,首先不是每一个数列都可以写出它的通项公式,比如从小到大的质数所组成的数列;其次同一个数列的通项公式可以用几种不同的方式表示,比如奇数项为1,偶数项为0的数列 1, 0, 1, 0, …,它的通项公式可以写成

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}, \end{cases} n = 1, 2, \cdots$$

也可以写成一个解析式

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{2}, \ n = 1, 2, \cdots$$

求数列的通项公式没有统一的方法,要具体问题具体分析.

等差数列是一次函数在自变量取自然数时的特例,即等差数列是线性函数的离散化. 等比函数是指数函数的特例,即等比函数是指数函数的离散化.

§2 差分的概念及性质

2.1 数列差分的概念

定义 12.1 数列相邻项的差, 称为数列的差分.

应用数列的函数本质,可以利用函数的差分来进行定义,便于讨论差分与数列通项的关系.

定义 12.2 设函数 $y = f(x)$,记为 y_x,当 x 取遍非负整数时函数值可以排成一个数列: y_0, y_1, $\cdots y_x$, $\cdots$,则差 $y_{x+1} - y_x$ 成为函数 y_x 的差分,也称为一阶差分,记为 Δy_x.

也可以直接对数列进行定义:

定义 12.3 对任何数列 $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, 其差分算子 Δ(读作 delta)定义如下:

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= a_2 - a_1, \\ \Delta a_2 &= a_3 - a_2, \\ \Delta a_3 &= a_4 - a_3, \\ &\cdots \end{aligned}$$

一般地,对任何 n 有 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

应用这个算子 Δ，从原来的数列 A 构成一个新的数列 ΔA，从数列 ΔA 可得到数列 $\Delta^2 A = \Delta^2 a_n$，这里

$$\begin{aligned}\Delta^2 a_n &= \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n \\ &= a_{n+2} - a_{n+1} - a_{n+1} + a_n \\ &= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n,\end{aligned}$$

称为数列 A 的二阶差分，二阶差分 $\Delta^2 a_n$ 的差分 $\Delta^3 a_n$ 称为三阶差分，二阶及二阶以上的差分称为高阶差分，而称 Δa_n 为一阶差分.

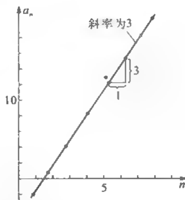
2.2 差分的物理和几何意义

在物理方面，一阶差分表示物体运动的平均速度，二阶差分表示平均加速度；在几何方面，一阶差分表示数列图形中相邻两点连线的斜率.

例如：

n	a_n	Δa_n	n	a_n	Δa_n
1	-2	3	5	10	3
2	1	3	6	13	3
3	4	3	7	16	3
4	7	3	8	19	3

几何上的表示就是：



2.3 差分的性质

将数列看作函数，则可以直接利用函数差分的性质，具体证明可参见《数值计算》.

(1) 各阶差分均可以用函数值表示：

$$\Delta^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{n+k-j}.$$

(2) 可用各阶差分表示函数值：

$$f_{n+k} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j f_k.$$

(3) 差分与导数的关系：

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\zeta),$$

其中 h 为步长，$x \in (x_k, x_{k+n})$.

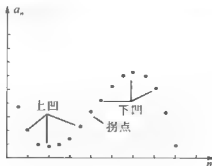
§3　差分表的性质和应用

利用差分可以来判断数列的增减等性质，先给出以下定义：

定义 12.4　数列 $A=\{a_n\}$ 在第 k 项处是增的，若 $a_k < a_{k+1}$(或用算子记号，$\Delta a_k > 0$). 数列 A 在第 k 项处是减的，若 $a_k > a_{k+1}$(即 $\Delta a_k < 0$). 数列 A 在第 k 项处达到相对极大，若 $a_k > a_{k+1}$ 且 $a_k \geqslant a_{k-1}$(或用算子记号，$\Delta a_{k-1} \geqslant 0$ 且 $\Delta a_k < 0$). 数列 A 在第 k 项处达到相对极小，若 $a_k < a_{k+1}$ 且 $a_k \leqslant a_{k-1}$(即 $\Delta a_{k-1} \leqslant 0$ 且 $\Delta a_k > 0$). 数列 A 在第 k 项处上凹，若 $\Delta a_k > \Delta a_{k-1}$(或用二阶差分的算子记号，$\Delta^2 a_{k-1} > 0$). 数列 A 在第 k 项处下凹，若 $\Delta a_k < \Delta a_{k-1}$(即 $\Delta^2 a_{k-1} < 0$).

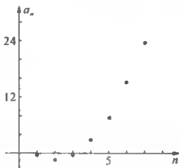
注意：在 $k-1$ 处的一阶差分决定了 k 项处的增减性，而在 $k-1$ 处的二阶差分决定了 k 项处的凹性. 决定凹性的另一种看法是：当一阶差分增加时数列上凹，而当一阶差分减小时数列下凹.

定义 12.5　数列 A 在第 k 项处有一个拐点，倘若 $\Delta^2 a_k$ 和 $\Delta^2 a_{k-1}$ 异号.



可以利用差分表确定数列在何处递增、递减，达到相对极大或极小，上凹、下凹以及是否有拐点. 例如：

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$
1	0	1	2
2	−1	1	2
3	0	3	2
4	3	5	2
5	8	7	2
6	15	9	/
7	24	/	/



[illegible] 如果一个数列的 p 阶差分数列是(不全为零的)常数列，则称这个数列为 p 阶等差数列. 一阶等差数列即是我们通常说的等差数列，二阶及二阶以上的等差数列，通称为高阶等差数列.

求高阶等差数列的通项公式方法一般有逐差法和待定系数法，下面介绍其中的一种.

例 1 求数列 1, 7, 25, 61, 121, 211, …的通项公式.

解：先写出各阶差分数列：一阶 b_n：6, 18, 36, 60, 90, …

二阶 c_n：12, 18, 24, 30, …

三阶 d_n：6, 6, 6, …

可见数列$\{a_n\}$为三阶等差数列，而 c_n 为首项为 12、公差为 6 的等差数列，易得

$$c_n = 12 + 6(n-1) = 6n + 6,$$

$\because b_n - b_{n-1} = c_{n-1}\,(n \geqslant 2)$,

$\therefore b_n - b_{n-1} = 6(n-1) + 6 = 6n$,

$$b_{n-1} - b_{n-2} = 6(n-1),$$

$$\cdots$$

$$b_2 - b_1 = 6 \times 2,$$

$\therefore b_n - b_1 = 6(2+3+\cdots+n) = 6 \cdot \dfrac{(n+2)(n-1)}{2} - 6 = 3n^2 + 3n - 6$,

$\therefore b_n = 3n^2 + 3n - 6 + b_1 = 3n^2 + 3n$.

同理可求出 $a_n = n^3 - n + 1$.

定理 12.1 数列$\{a_n\}$为 p 阶等差数列的充要条件是：数列$\{a_n\}$的通项公式为 n 的 p 次多项式，而它的前 n 项和为 n 的 $(p+1)$ 次多项式.

例 2 求数列 5, 17, 35, 59, 89, …的通项公式.

解：先写出各阶差分数列：一阶 b_n：12，18，24，30，…

二阶 c_n：6，6，6，…

可得这是一个二阶等差数列. 设 $a_n = an^2 + bn + c$，将 $a_1 = 5$，$a_2 = 17$，$a_3 = 35$ 代人可得

$$\begin{cases} a + b + c = 5, \\ 4a + 2b + c = 17, \\ 9a + 3b + c = 35, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 3, \\ b = 3, \\ c = -1. \end{cases}$$

$\therefore a_n = 3n^2 + 3n - 1$.

§4　差分方程和差分方程组

4.1　差分方程

定义 12.7　差分方程是包含离散变量函数相继值之间差分的数学等式. 初始条件是该数列的第一项. 出现在差分方程中的项的最大下标减去最小下标得到的数称为差分方程的阶.

比如 $a_{n+1} = 5a_n$；$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 4a_n = 6$ 等.

定义 12.8　如果差分方程中包含数列变量(即包含 a_n)的项不包含数列变量的乘积，不包含数列变量的幂，也不包含数列变量的诸如指数、对数或三角函数在内的函数，那么我们称该差分方程是线性的. 否则差分方程就是非线性的.

值得注意的是这种限制只适用于包含数列变量的项，而不能用于不包含数列变量的其他项.

例如：$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 4a_n = 6$ 是线性的，而 $a_{n+1} = (a_n)^2$ 是非线性的.

定义 12.9　线性差分方程称为齐次的，如果它只包含数列变量的项. 如果略掉非齐次方程中不包含数列变量的项，就得到一个齐次方程，称之为与原方程相应的齐次方程.

例如：$a_{n+1} = 5a_n$ 为齐次的，而 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 4a_n = 6$ 为非其次的，$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 4a_n = 0$ 为其对应的齐次方程.

定义 12.10　差分方程的解是一个函数，当把它代人差分方程时就得到一个恒等式，而且还满足任何给定的初始条件.

定义 12.11　差分方程的一个通解是一个函数，当代入特定值后就得到相应于不同初值的特解.

定义 12.12　一阶线性差分方程为 $a_{n+1} = ka_n + b$，当 $b = 0$(即方程为齐次方

程）时，其解为等比数列. 当 k 1（即差分为常数）时，其解为等差数列.

一阶线性差分方程的一般形式为 $a_{n+1}=ka_n+f(n)$，其中 $f(n)$ 通常为常数、多项式函数、指数函数和正余弦型函数等四种形式. 高中新课标只要求研究 $f(n)$ 为常数的情况.

解线性差分方程的常用方法有逐差法、数列代换法、特征根法等. 具体解法如下：已知一阶线性方程 $a_{n+1}=ka_n+b$，求 a_n.

解法一 逐差法.

由 $a_{n+1}=ka_n+b$ 得 $a_i-ka_{i-1}=b\ (i\geqslant 2)$，两边同时乘以 k^{n-i}，可得

$$a_ik^{n-i}-k^{n-i+1}a_{i-1}=bk^{n-i},$$

两边依次相加可得

$$\sum_{i=2}^{n}(a_ik^{n-i}-k^{n-i+1}a_{i-1})=\sum_{i=2}^{n}bk^{n-i},$$

所以

$$\begin{aligned}a_n-k^{n-1}a_1&=b(1+k+k^2+\cdots+k^{n-2}),\\&=\frac{b(1-k^{n-1})}{1-k},\end{aligned}$$

所以

$$a_n=a_1k^{n-1}+\frac{b(1-k^{n-1})}{1-k},$$

所以

$$a_n=\left(a_1-\frac{b}{1-k}\right)k^{n-1}+\frac{b}{1-k}.$$

解法二 数列代换法.

由 $a_{n+1}=ka_n+b$ 得 $a_{n+1}-ka_n=b$，$a_{n+2}-ka_{n+1}=b$，两式相减可得

$$a_{n+2}-a_{n+1}-k(a_{n+1}-a_n)=0,$$

令 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则 $b_1=a_2-a_1$，且 $b_{n+1}=kb_n$，所以

$$b_n=b_1\cdot k^{n-1}=(a_2-a_1)k^{n-1}.$$

因为

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=(a_2-a_1)k^{n-1},\\a_{n+1}-ka_n&=b,\end{aligned}$$

所以

$$(1-k)a_n = b-(a_2-a_1)k^{n-1},$$

又

$$a_2 = ka_1 + b,$$

所以

$$a_n = \left(a_1 - \frac{b}{1-k}\right)k^{n-1} + \frac{b}{1-k}.$$

解法三 特征根法.

一阶线性差分方程 $a_{n+1}=ka_n+b$ 其对应的齐次方程为 $a_{n+1}=ka_n$，特征方程为 $\lambda=k$，因此齐次方程 $a_{n+1}=ka_n$ 的通解为 $a_n=ck^n$，$a_{n+1}=ka_n+b$ 的一个特解为 $x=\frac{b}{1-k}$，因此 $a_{n+1}=ka_n+b$ 的通解为 $a_n=ck^n+\frac{b}{1-k}$，代入初值可求出 c.

值得注意的是逐差法和数列代换法是在已知首项(即初值条件)时，用初等的方法求出数列的通项. 而特征根法可用于求一阶线性差分方程的通解，利用常微分方法(高等数学)可以求解差分方程，这是因为差分方程是微分方程的离散化.

定理 12.2 一阶线性差分方程 $a_{n+1}=ka_n+b$ 的解为：

$$a_n = ck^n + \frac{b}{1-k}, \text{若 } k \neq 1;$$

$$a_n = bn + c, \text{若 } k = 1.$$

其中 c 为与初值条件相关的常数.

定义 12.13 由两个或多于两个的差分方程构成的方程组称为差分方程组. 在差分方程组中，单个差分方程的阶数的最大值称为差分方程组的阶数.

例如：$\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n+c, \\ y_{n+1}=dx_n+ey_n+f, \end{cases}$ 其中当 $c=f=0$ 时，$\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n, \\ y_{n+1}=dx_n+ey_n \end{cases}$ 为其对应的齐次方程组.

一阶非齐次线性差分方程组的通解＝一阶非齐次线性差分方程组的特解＋一阶齐次线性差分方程组的通解.

而一阶齐次线性差分方程组的通解，与初等数学中求解二元一次方程组类似，对于一阶齐次线性差分方程组通常也采用消元法求解，消去一个未知数列及其差分，得到只含有一个未知数列及其差分的二阶齐次线性差分方程，问题转化为求二阶齐次线性差分方程的解，解此方程，求出满足该方程的未知数列，再代入原方程组的一个方程，求得另一个未知数列.

一个一阶非齐次线性差分方程组，通过消元，也可得到一个二阶非齐次线性差分方程 $x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=c$ (c 为常数). 二阶非齐次线性差分方程的一般形式为：

$x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=f(n)$，其中 $f(n)$ 通常为常数、多项式函数、指数函数和正余弦型函数等四种形式. 理论求法要用到齐次差分方程通解的显式表达，即基础解系的线性组合，比较麻烦，在实际中，常采用试探法，即根据 $f(n)$ 的特点推测特解的形式，用待定系数法求解. 对于二阶非齐次线性差分方程的特解，先求出特征方程为

$$\lambda^2+a\lambda+b=0.$$

当 $\lambda=1$ 不是特征方程的特征根时，二阶非齐次线性差分方程有特解 $x_n=\dfrac{c}{1+a+b}$；

当 $\lambda=1$ 是特征方程的单根时，二阶非齐次线性差分方程有特解 $x_n=\dfrac{cn}{2+a}$；

当 $\lambda=1$ 是特征方程的二重根时，二阶非齐次线性差分方程有特解 $x_n=\dfrac{1}{2}cn^2$.

将一阶非齐次线性差分方程组的特解与其对应一阶齐次线性差分方程组的通解求出之后，即可求得一阶非齐次线性差分方程组的通解＝一阶非齐次线性差分方程组的特解＋一阶齐次线性差分方程组的通解.

4.2　k 阶常系数齐次线性差分方程

[illegible]　形如

$$a_n-\alpha_1a_{n-1}-\alpha_2a_{n-2}-\cdots-\alpha_ka_{n-k}=0, \quad ①$$

$n=k, k+1, \cdots$. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是常数且 $\alpha_k\neq 0$，称为 k 阶常系数齐次线性差分方程.

[illegible]　形如

$$x^k-\alpha_1x^{k-1}-\alpha_2x^{k-2}-\cdots-\alpha_{k-1}x-\alpha_k=0, \quad ②$$

称为 k 阶常系数齐次线性差分方程①的特征方程，它的 k 个根 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 称为①的特征根. 其中 $q_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 是复数.

易看出，由于 $\alpha_k\neq 0$，故 0 不是①的特征根.

定理 12.3　设 q 是一个非零的复数，则 $H(n)=q^n$ 是①的一个解当且仅当 q 是它的一个特征根.

证明：$H(n)=q^n$ 是①的解

$$\Leftrightarrow q^n-\alpha_1q^{n-1}-\alpha_2q^{n-2}-\cdots-\alpha_{k-1}q^{n-k+1}-\alpha_kq^{n-k}=0$$

$$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k-\alpha_1q^{k-1}-\alpha_2q^{k-2}-\cdots-\alpha_k)=0 \text{ (因为 } q\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow q^k-\alpha_1q^{k-1}-\alpha_2q^{k-2}-\cdots-\alpha_k=0$$

$\Leftrightarrow q$ 是①的特征根.

定理 12.4 设 $h_n^{(1)}$，$h_n^{(2)}$ 是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的两个解，c_1，c_2 是任意常数，则 $c_1h_n^{(1)}+c_2h_n^{(2)}$ 也是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的解.

证明：把 $c_1h_n^{(1)}+c_2h_n^{(2)}$ 代入①式得左边得

$$\begin{aligned}&[c_1h_n^{(1)}+c_2h_n^{(2)}]-a_1[c_1h_{n-1}^{(1)}+c_2h_{n-1}^{(2)}]-\cdots-a_k[c_1h_{n-k}^{(1)}+c_2h_{n-k}^{(2)}]\\=&[c_1h_n^{(1)}-a_1c_1h_{n-1}^{(1)}-\cdots-a_kc_1h_{n-k}^{(1)}]+[c_2h_n^{(2)}-a_1c_2h_{n-1}^{(2)}-a_kc_2h_{n-k}^{(2)}]\\=&c_1[h_n^{(1)}-a_1h_{n-1}^{(1)}-\cdots-a_kh_{n-k}^{(1)}]+c_2[h_n^{(2)}-a_1h_{n-1}^{(2)}-a_kh_{n-k}^{(2)}]=0,\end{aligned}$$

所以 $c_1h_n^{(1)}+c_2h_n^{(2)}$ 是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的解.

由定理 12.3 和 12.4 可以知道，如果 q_1，q_2，…，q_k 是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的特征根，且 c_1，c_2，…，c_k 是任意常数，那么

$$H_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$$

是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的解.

[illegible] 如果对于 k 阶常系数齐次线性差分方程①的每一个解 h_n 都可以选择一组常数 c_1'，c_2'，…，c_k' 使得

$$h_n=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\cdots+c_k'q_k^n$$

成立，则称 $h_n=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\cdots+c_k'q_k^n$ 是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的通解，其中 c_1'，c_2'，…，c_k' 为任意常数.

定理 12.5 设 q_1，q_2，…，q_k 是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的不相等的特征根，c_1，c_2，…，c_k 是 k 个常数，则

$$H_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$$

是①的通解.

证明：由定理 12.4 可知 H_n 是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的解. 设 h_n 是 k 阶常系数齐次线性差分方程的任意一个解，则 h_n 由 k 个初值 $h_0=b_0$，$h_1=b_1$，…，$h_{k-1}=b_{k-1}$ 唯一确定，所以有

$$\begin{cases}c_1+c_2+\cdots+c_k=b_0,\\c_1q_1+c_2q_2+\cdots+c_kq_k=b_1,\\\quad\cdots\\c_1q_1^{k-1}+c_2q_2^{k-1}+\cdots+c_kq_k^{k-1}=b_{k-1},\end{cases}\qquad③$$

如果方程组③由唯一解 c_1'，c_2'，…，c_k'，这说明可以找到 k 个常数 c_1'，c_2'，…，c_k' 使得

$$h_n=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\cdots+c_k'q_k^n$$

成立，从而证明了 $c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\cdots+c_k'q_k^n$ 是 k 阶常系数齐次线性差分方程①的通解.

方程组③的系数行列式是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \cdots & q_k^{k-1} \end{vmatrix},$$

这是著名的范德蒙行列式，其值为 $\prod(q_j-q_i)$，因为当 $i\neq j$ 时，$q_i\neq q_j$，所以行列式的值不等于0，这也就是说方程组③有唯一解.

现在，我们利用上述定理解关于斐波那契数列的差分方程.

例3 已知斐波那契数列

$$\begin{cases} F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}), \\ F_0=1,\ F_1=1, \end{cases}$$

求其通解 F_n.

解：由上面的定义知，这个差分方程的特征方程是 $x^2-x-1=0$，解该一元二次方程，得特征根为

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

所以通解是

$$F_n=\beta_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

代入初始条件确定 β_1，β_2 得方程组

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2=1, \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\beta_1+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta_2=1, \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

所以斐波那契数列的通解是

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},\ n=0,\ 1,\ \cdots$$

对于k阶常系数线性齐次递推关系，当特征根$q_1, q_2, \cdots, q_k$都不相等的时候，我们已经得到了求通解的方法.但是当$q_1, q_2, \cdots, q_k$中有重根时，这种方法就不适用了.换句话说，方程$c_1q_1^n + c_2q_2^n + \cdots + c_kq_k^n$就不是$k$阶常系数齐次线性差分方程的通解了.因为把$k$个初值代入以后得到$k$个方程，但未知数至多为$k-1$个，这样可能使得方程组无解.这说明只有在$q_1, q_2, \cdots, q_k$都线性无关时才能得到递推关系的通解.

例4 求差分方程$H_n = 4H_{n-1} - 4H_{n-2}$其中$H_0 = 1$, $H_1 = 3$.

解：该差分方程的特征方程是$x^2 - 4x + 4 = 0$，特征根是$x_1 = x_2 = 2$.由定理12.3可知2^n是它的解.接下来不妨试试$n2^n$，把它代入到原差分方程

$$\begin{aligned} n2^n - 4(n-1)2^{n-1} + 4(n-2)2^{n-2} &= n2^n - 2^2(n-1)2^{n-1} + 2^2(n-2)2^{n-2} \\ &= n2^n - (n-1)2^{n+1} + (n-2)2^n \\ &= 2^n[n - 2(n-1) + (n-2)] = 0, \end{aligned}$$

这说明$n2^n$也是解，且与2^n线性无关，所以原递推关系的通解是$H_n = c_12^n + c_2n2^n$.

一般地，可得到下面的定理：

定理12.6 设$q_1, q_2, \cdots, q_t$是k阶齐次常系数线性方程

$$a_n - a_1a_{n-1} - a_2a_{n-2} - \cdots - a_ka_{n-k} = 0$$

的不相等的特征根，则①的通解为

$$H_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} + \cdots + H_n^{(t)},$$

其中$q_i(i = 1, 2, \cdots, t)$对应$H_n^{(i)} = c_1q_i^n + c_2nq_i^n + \cdots + c_{e_i}n^{e_i-1}q_i^n$，而$e_i$是$q_i$的重数.

例5 求满足下列条件的差分方程：

$$H_n + H_{n-1} - 3H_{n-2} - 5H_{n-3} - 2H_{n-4} = 0,$$

$$H_0 = 1,\ H_1 = 0,\ H_2 = 1,\ H_3 = 2.$$

解：据定义知，该差分方程所对应的特征方程是$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$，它的特征根是$-1$, -1, -1, 2，注意这里根(-1)是3重的，定理12.5不适用，由定理12.6知，对应于3重特征根-1的解是

$$H_n^{(1)} = c_1(-1)^n + c_2n(-1)^n + c_3n^2(-1)^n;$$

对应于特征根2的解是： $H_n^{(2)} = c_42^n$；

所以递推关系的通解是

$$H_n = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} = c_1(-1)^n + c_2n(-1)^n + c_3n^2(-1)^n + c_42^n.$$

下面只要再把c_1, c_2, c_3, c_4确定下来即可.

据初始值得到以下方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 1, \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0, \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1, \\ -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2, \end{cases}$$

解这个方程组得

$$c_1 = \frac{7}{9},\ c_2 = -\frac{1}{3},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{2}{9}.$$

原方程的解是：

$$H(n) = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + \frac{2}{9} \times 2^n.$$

4.3 常系数线性非齐次差分方程

定义 12.7 形如

$$H_n - \alpha_1 H_{n-1} - \cdots - \alpha_k H_{n-k} = f_n (n \geqslant k,\ \alpha_k \neq 0,\ f_n \neq 0) \quad ④$$

的方程称为常系数线性非齐次差分方程.

定理 12.7 常系数线性非齐次方程

$$H_n - \alpha_1 H_{n-1} - \cdots - \alpha_k H_{n-k} = f_n (n \geqslant k,\ \alpha_k \neq 0,\ f_n \neq 0),$$

它的通解是齐次通解与特解之和，即

$$H_n = H'_n + H^*_n$$

其中 $H'(n)$ 是递推关系①所对应的齐次差分方程

$$H_n - \alpha_1 H_{n-1} - \cdots - \alpha_k H_{n-k} = 0$$

的通解. H^*_n 是差分方程④的特解.

（证明略）

对于特解的解法，一般说来，当 f_n 是 n 的 t 次多项式时，对应的特解形式为

$$H^*_n = P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \cdots + P_t n + P_{t+1},$$

其中 $P_1, P_2, \cdots, P_{t+1}$ 为待定系数.

例 6 求 $H_n + 5H_{n-1} + 6H_{n-2} = 3n^2$ 的特解.

解：因为 $f_n = 3n^2$. 假设特解 $H^*_n = P_1 n^2 + P_2 n + P_3$，其中 P_1, P_2, P_3 为待定系数. 把 H^*_n 带入原差分方程得

$$P_1n^2+P_2n+P_3+5[P_1(n-1)^2+P_2(n-1)+P_3]+$$
$$6[P_1(n-2)^2+P_2(n-2)+P_3]=3n^2,$$

化简左边得

$$12P_1n^2+(-34P_1+12P_2)n+(29P_1-17P_2+12P_3)=3n^2,$$

比较两边系数有

$$\begin{cases}12P_1=3,\\-34P_1+12P_2=0,\\29P_1-17P_2+12P_3=0,\end{cases}$$

从而解得

$$P_1=\frac{1}{4},\ P_2=\frac{17}{24},\ P_3=\frac{115}{288}.$$

所求的特解是

$$H_n^*=\frac{1}{4}n^2+\frac{17}{24}n+\frac{115}{288}.$$

例 7 求 $H_n-H_{n-1}=7n$ 的特解.

解：如果设 $H_n^*=P_1n+P_2$，代入原差分方程得

$$(P_1n+P_2)-[P_1(n-1)+P_2]=7n,$$

化简得 $P_1=7n$.

从上式解不出 P_1 和 P_2. 这是因为当原递推关系的特征根是 1 时，如果所设的特解中 n 的最高次幂的次数与 $f(n)$ 的次数一样，代入原递推关系后，等式左边的 n 的最高次幂就会消去. 因此等式左边的多项式比右边的多项式的次数低. 为此，在设特解时要将 n 的最高次幂提高，并且可以不设常数项. 这里设

$$H_n^*=P_1n^2+P_2n,$$

代入原递推关系得

$$(P_1n^2+P_2n)-[P_1(n-1)^2+P_2(n-1)]=7n,$$

化简得

$$2P_1n+P_2-P_1=7n,$$

解得 $P_1=P_2=\frac{7}{2}$，所以特解为 $H_n^*=\frac{7}{2}n(n+1)$.

值得注意的是，一般地说，当 $f(n)$ 是 β^n 的形式，若 β 不是对应的齐次递推关系

的特征根，则对应的特解是 $P\beta^n$，其中 P 为待定系数；若 β 是对应的齐次递推关系的 m 重特征根，则对应的特解是 $Pn^m\beta^n$，其中 P 为待定系数.

例 8 世界末日问题

传说在印度佛教圣地贝拿勒斯圣庙里，安放着一个黄铜板，板上插着三根宝石针（A、B、C），其中一根宝石针（A）从上到下插放着由小到大的 64 片有孔的金片，昼夜都有一个值班的僧侣，按下列法则移动金片：一次只能移动一片，小片永远要放在大片的上面. 问多少天后能把这 64 片金片移完？传说当时有人声称：当 64 片金片都从一根宝石针上取下，移到另一根宝石针上时，世界就将在一声霹雳声中毁灭——世界末日到来.

分析：这个传说的数学问题：64 片金片从一根宝石针上移至另一根宝石针上（如从宝石针 A 移到 B），需要移动多少次？其实这也是一个差分问题，而差分问题的关键是如何建立差分方程式和如何由方程式及初始条件求通项的值.

解法一：令 a_n 表示移动 n 片金片所需的次数，设计移动的算法：先把 $n-1$ 片金片移到 C 上，用 a_{n-1} 次，然后把最大的金片移到 B 上，最后再用 a_{n-1} 次把 C 上的金片移到 B 上，所以有递推关系：

$$a_n = 2a_{n-1} + 1,$$
$$a_1 = 1,$$

这是一个常系数线性非齐次递推关系式，它的特征方程为 $x-2=0$，齐次的解为 2^n. $a(n)=c_1q_1^n$.

设它的特解为 P，代入原递推关系，得 $P-2P=1$，所以特解是 -1. 根据前面的分析可知该递推关系的通解为 $H(n)=H'(n)+H^*(n)$，即 $a_n=c2^n-1$. 代入初值得 $H(0)=0$，得 $c=1$. 所以有 $a_n=2^n-1, n\geqslant 0$. 把 64 代入上式得 $a_{64}=2^{64}-1$，即需要约 2^{64} 天，这是一个非常大的数字，难怪当时的人们要说那天也许就是世界末日.

解法二：我们已知怎样求解常系数线性差分方程，其能否成功依赖于能否找到特征方程的根. 一旦已经求得这个根后，还需要求解一个线性方程组. 对于不是常系数线性齐次的差分方程系，至今还没给出任何一种普遍适用的方法. 下面我们再提供一个求解某些差分方程可能采用的方法. 也可以用迭代和归纳法求解.

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}+1 \\ &= 2(2a_{n-2}+1)+1 \\ &= 2^2a_{n-2}+2+1 \\ &= 2^3a_{n-3}+2^2+2+1 \\ &\cdots \\ &= 2^{n-1}a_1+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1 \\ &= 2^n-1. \end{aligned}$$

§5 差分方程和差分方程组的应用

差分方程模型是实际应用中常见的一种数学模型. 用差分方程模型解决实际问题如同别的数学模型一样，大致需经过三个步骤：

第一步：设定好实际问题中的未知函数，按照已知的相关领域中的物理、力学、化学、生物、经济等学科的规律用于建立相邻的自变量值（一般就是相邻时间）的未知函数取值间的依赖关系，建立差分方程模型.

第二步：对上述建立的差分方程模型，若能直接求解的，则求出其解，若不能直接求解的或直接求解比较困难的，则用定性的方法讨论其解的变化趋势及性质.

第三步：将数学讨论得到的结果与实际情形加以对照，然后给实际问题一个满意的答复.

例 9 一阶线性差分方程的应用——减肥模型

用 w_n（单位：千克）来表示某人在第 n 天的体重（可理解为第 n 天的脂肪的重量），假设人体活动消耗掉的热量与体重成正比，记为 $Bw_n(B>0)$，假设新陈代谢消耗的热量和体重也成正比，记为 $Cw_n(C>0)$，假设每天进食热量都是一样的，为常数 A，并且已知完全消耗一千克脂肪会转化为约 $D=10000$ 卡路里的热量. 根据上述条件和热量守恒定律，建立体重 w_n 和它的差分 Δw_n 满足的差分方程.

一个人从第 n 天到第 $n+1$ 天，体重的变化为 $\Delta w_n=w_{n+1}-w_n$，体内热量的变化为 $D\Delta w_n$，而体内热量的变化为进入人体的热量减去消耗的热量，所以有

$$D\Delta w_n=A-(B+C)w_n,$$

这样，我们就得到了用差分方程来描述的"减肥"的数学模型.

模型的解：

整理上述方程为：$\Delta w_n=\frac{A}{D}-\frac{B+C}{D}w_n$，记 $a=\frac{A}{D}$，$b=\frac{B+C}{D}$，则有 $w_{n+1}=a+(1-b)w_n$，此差分方程的通解为 $w_n=\frac{a}{b}+(1-b)^{n-1}\left(w_1-\frac{a}{b}\right)$.

模型分析：

1. 随着时间 n 的增加，当 n 趋向于无穷大时，$(1-b)^{n-1}$ 趋向于 0，这样 w_n 趋向于 $\frac{a}{b}=\frac{A}{B+C}$，我们把它称为理想体重.

2. 从理论上讲，当人的体重 $w_1>\frac{a}{b}$ 时，要想达到理想体重就需要减肥.

3. 人的理想体重为 $\frac{A}{B+C}$，所以每天进食的热量 A 越少，每天消耗的热量 $B+$

C 越多,体重的理想值就越小,而且通过控制 A 和 B,可以使人的体重达到任意理想的值.

4. 不进食的节食减肥法是很危险的,因为若 $A = 0$,则 w_n 趋向于 0,体重都"没有"了,哪还能活命?

例 10 一阶线性差分方程组的应用——"兔子—狐狸生态模型"

如果没有狐狸,假设兔子每年增长 10%,但是,狐狸的出现使兔子减少,假设兔子减少的数量和狐狸数量成正比,比例系数为 0.15. 另一方面,在没有兔子的情况下,假定狐狸数量每年减少 15%,但是兔子的出现使狐狸数量增长,假设狐狸增加的数量和兔子数量成正比,比例系数为 0.1. 假设现有兔子数 10 个,狐狸数 8 个,问若干年后兔子与狐狸的数量如何?

解:设兔子为 R,狐狸为 F,建立模型,

$$\begin{cases} R_n = 1.1R_{n-1} - 0.15F_{n-1}, \\ F_n = 0.1R_{n-1} + 0.85F_{n-1}, \end{cases} n \geqslant 1, \text{即} \begin{bmatrix} R_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.15 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ F_{n-1} \end{bmatrix},$$

解得 $\begin{cases} R_n = 4(0.95)^n + 6, \\ F_n = 4(0.95)^n + 4. \end{cases}$

例 11 某出租车公司在 A、B 两城各设有一营业厅,A、B 两城营业部每天都有 10%,12%的出租车被租用开到对方城市并留在对方城市供租用,设 a_n,b_n 分别表示第 n 天 A、B 两城可供出租的汽车数,试建立两城每天可供出租汽车数的模型. 出租车公司关心的是每个营业部每天都至少要保持分别有 120 辆汽车供出租,如果一开始时 A、B 两城分别有 120、150 辆汽车供租用,能保持吗?

解:建立模型

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.9a_n + 0.12b_n, \\ b_{n+1} = 0.1a_n + 0.88b_n. \end{cases}$$

在初始值 $a_0 = 120$,$b_0 = 150$ 条件下的特解为

$$\begin{cases} a_n = -27.54(0.78)^n + 147.54, \\ b_n = 27.54(0.78)^n + 122.46. \end{cases}$$

容易看出,当一开始时 A、B 两城分别有 120、150 辆汽车供租用,能保持两城营业部每天都至少分别有 120 辆汽车出租.

这个方程组还可以利用矩阵的特征根与特征向量来解,具体可参考"矩阵与变换"这一章中特征根与特征向量.

例 12 设现有一笔 p 万元的商业贷款,如果贷款期是 n 年,年利率是 r_1,今采用月还款的方式逐月偿还,建立数学模型计算每月的还款数是多少?

分析与解：在整个还款过程中，每月还款数是固定的，而待还款数是变化的，找出这个变量的变化规律是解决问题的关键.

设贷款后第 k 个月后的欠款数是 A_k 元，月还款为 m 元，月贷款利息为 $r=\frac{r_1}{12}$.

模型建立：关于离散变量 A_k，考虑差分关系有：

$$A_k+rA_k=A_{k+1}+m,$$

即

$$A_{k+1}=(1+r)A_k-m. \qquad (*)$$

令 $B_k=A_k-A_{k-1}$，则

$$B_k=B_{k-1}(1+r)=B_1(1+r)^{k-1},$$

所以

$$\begin{aligned}A_k&=A_0+B_1+B_2+\cdots+B_k\\&=A_0+B_1[1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{k-1}]\\&=A_0(1+r)^k-\frac{m}{r}[(1+r)^k-1],\end{aligned}$$

$k=0, 1, 2, \cdots$.

这就是差分方程($*$)的解. 把已知数据 A_0，r，代入 $A_{12n}=0$ 中，可以求出月还款额 m. 例如：$A_0=10\,000$，$r\doteq 0.005\,212\,5$，$n=2$ 时，可以求出 $m=444.356$ 元.

差分方程与差分方程组在很多方面都有应用，除了以上例子之外，还有动态经济系统的蛛网模型、价格与库存模型、筹措教育经费模型等等.

本章思考题

1. 求数列 1, 3, 6, 10, 15, 21, …的通项公式及前 n 项和.
2. 解一阶齐次线性差分方程组：

$$\begin{cases}x_{n+1}=4x_n-2y_n,\\y_{n+1}=2x_n.\end{cases}$$

3. 求如下一阶非齐次线性差分方程组的通解，并求其在初值条件 $x_0=10$，$y_0=9$ 下的特解.

$$\begin{cases}x_{n+1}+x_n+2y_n=24,\\y_{n+1}+2x_n-2y_n=9.\end{cases}$$

4. (饮料冷却)饮料放入冰箱,并定时测量其温度,观察发现,当饮料的温度和冰箱的温度之差大的时候,饮料在单位时间中的温度变化较大,而当饮料的温度和冰箱的温度之差小的时候,饮料在单位时间中的温度变化较小.即每分钟温度的变化与冰箱温度和饮料温度的差成正比,且通过实验知道比例系数约为0.008.冰箱冷藏室的温度调节在5℃,一罐初始温度为40℃的饮料放入冷藏室,问经过多长时间才能达到10℃?

本章参考文献

[1] 张定强等.高中数学新课程内容解析[M].首都师范大学出版社,2004.
[2] 同济大学计算数学教研室编著.现代数值数学和计算[M].同济大学出版社,2004.
[3] 林武忠,汪志鸣,张九超.常微分方程[M].科学出版社,2003.
[4] 刘佛清.数列方法与技巧[M].华中理工大学出版社,1986.
[5] COMAP著,申大维等译.数学的原理与实践[M].高等教育出版社,1998.

第十三章　球面几何

我们生活在地球上，地球表面十分接近于一个球面. 因此，在实际生活中，球面上的几何(简称球面几何)知识有着广泛的实际应用. 例如，天体测量、航空、卫星定位等方面均需利用球面几何的知识. 在理论上，球面几何是一个与欧氏平面几何不同的几何模型，是一个重要非欧几何的数学模型，球面几何在几何学的理论研究方面，具有特殊的作用.

本章介绍球面几何的一些基本知识及其在实际中的一些应用，通过比较球面几何和欧氏平面几何的差异和联系，让学生感受学习球面几何的乐趣.

§1　概　　述

1.1　什么是球面几何

几何学是研究外部物质世界空间关系的科学，其含义在不同时期都不同. 在欧几里得看来，几何学是由一组从公理引出的逻辑推理系统. 在克莱因看来，几何学是研究在变化群下图形的不变性与不变量的科学. 在此我们只从数学教育的角度给球面几何作以下描述：球面几何是研究球面上图形的形状、大小与位置关系的科学. 显然，这个描述是类比平面几何的含义得到的. 类比是学习、研究球面几何的一个重要方法，后面还要专门谈到.

1.2　球面几何的研究内容

我们知道，整个平面几何是在距离和角度的基础上展开的，三角形是欧氏平面上的基本图形，从某种意义上讲，平面几何学就是关于三角形的几何学，平面几何学的核心问题是关于三角形的研究. 由平面几何的研究我们可以得到启示，从定性角度讲球面几何要研究点与线、位置与方向、三角形与多边形等；从定量角度讲球面几何要研究距离与角度、周长、面积，尤其是要研究如何解球面三角形. 和平面几

何一样,球面几何的核心问题是关于球面三角形的研究.

1.3 球面几何的历史背景

人们研究球面几何历史悠久,早期的球面几何是古代人类探究天文现象的产物.在古代天文学的研究中,观察星星的方向可以用单位球面上的点来标记,而两个方向之间的角度(方向差)则对应于球面上两点之间的距离.这也就是为什么古希腊天文学和几何学总是合为一体的.

或许是宇宙奥秘对好奇心的驱使,或许是历法推算等实践活动的需要,古希腊人对量天比对测地更感兴趣,所以古希腊几何学家对球面三角的投入程度远远超过他们对平面测量的兴趣,这也说明了球面三角的研究先于平面三角.

随着社会的发展以及科学技术的突飞猛进,球面几何得到更加深入的研究.尤其是非欧几何的发现,对球面几何的理论认识更加深刻.下面我们列举一些早期历史上对球面几何研究作出贡献的人物.

欧几里得的《现象学》中有球面几何的18个命题,其中许多定理是用来探究恒星运动的.

西帕克斯(约公元前180—公元前125)是最著名的天文学家,被称为三角学之父.他最早编制过弦表,但著作失传.

梅内劳斯(Menelaus,约公元前1世纪)的著作《球面学》是球面三角的开山之作.

托勒密(约100—170)的《大成》是三角学最早的系统性论著,书中给出了许多球面三角定理,用以解决特定的天文学问题.

哥白尼(Nicolaus Copernicus, 1473—1543)的《天体运行论》第一卷第十四章是专门写球面几何的.

1.4 球面几何的类属

几何学的分类牵涉到高深的理论,在此只想说明一下球面几何属于欧氏几何、罗氏几何和黎曼几何中的哪一种,并介绍一下罗氏几何的三大模型.我们先来回顾一下《几何原本》的五个公设:

1.4.1 欧氏几何

几何原本的五个公设:

(1) 任两点决定一条直线;

(2) 一有限线段可以无限延长;

(3) 存在以任意点为中心任意长为半径的圆;

(4) 凡直角都相等;

(5) 平面上两直线被一直线所截，若截线一侧的内角之和小于 π，则此两直线必相交于截线的这一侧.

欧几里得沿袭了逻辑学创始人亚里士多德关于公设与公理的区别：公理是适用于一切科学的真理，而公设则是某一门科学特有的原理. 后来公设与公理不再区分，因此第五公设又称为第五公理.

从欧氏几何诞生到公元 1800 年的两千多年时间里，数学家始终对第五公设耿耿于怀，欧氏几何所用的公设应该是不证自明的真理，形式上应该是最简洁的. 而事实并非如此，第五公设在形式上远比其他四个公设复杂，它更像一个待证的定理.

1.4.2 非欧几何的含义

非欧几何这一名称有狭义、广义、通常意义之分. 狭义的非欧几何是仅指罗巴切夫斯基几何. 广义的非欧几何是指不是欧氏几何的几何都称作非欧几何. 通常意义的非欧几何就是指罗氏几何和黎曼几何这两种几何. 球面上的几何是黎曼几何，球面几何不是罗巴切夫斯基几何，球面几何又称为黎曼非欧几何.

1.4.3 罗氏几何及其实现的模型

(1) 罗氏几何的公设：满足欧氏几何的前四个公设而不满足第五公设. 罗氏几何的第五个公设是过已知直线外一点至少可以作两条直线和已知直线平行.

(2) 非欧几何模型：如果存在某个特殊的“平面”，在这个“平面”上可以把曲线叫作“直线”，此时，非欧平行公理是成立的. 那么这个“平面”可作为非欧几何模型.

(3) 罗氏几何的实现有三大模型：庞加莱模型、克莱因模型和双曲半平面模型.

(4) 庞加莱模型：

① 双曲平面：圆 K 内的点组成的集合，其中，圆 K 上的点是无穷远点，不是罗氏系统的几何元素.

② 双曲平面上的直线包括过圆心 K 的直线和与圆 K 垂直相交的圆在圆内的圆弧. 这里两圆垂直相交是指相交两圆在交点处的切线垂直.

满足上述①和②的双曲平面称为庞加莱模型

1.4.4 黎曼几何

把欧氏几何的公设 1、2 和 5 作如下修改就得到黎曼几何的五个公设.

公设 1　两个不同的点至少确定一条直线；

公设 2　直线无界但有限；

公设 3　存在以任意点为中心任意长为半径的圆；

公设 4　凡直角都相等；

公设 5　平面上任何两条直线都相交.

黎曼几何的五个公设在球面上都能实现，球面几何是黎曼几何实现的模型.

1.5　方法

1.5.1　学科方法

从方法论的角度看，球面几何的研究方法有以下几种.

(1) 实验方法：用观察分析、实验、归纳去发现总结球面几何的性质.

(2) 综合方法：用演绎方法整合新知，对球面几何进行系统化分析，即只依据基本的逻辑原理，从基本事实出发通过演绎推理建立起球面几何体系.

(3) 坐标方法：建立坐标系，把几何结构代数化，借助代数研究球面几何.

(4) 向量方法：用向量代数为工具，对球面几何元素及其关系进行研究. 其优点是把不变量理论用于向量运算之中.

(5) 分析方法：用微积分为工具，对球面几何元素及其关系进行研究.

例如，“球面上连结两点的所有曲线之长以球面距离为最短”这一性质可以用多面角知识借助综合方法证明，也可以用微积分中导数证明，还可以用微分几何中的测地线原理证明；再如球面上的正弦定理和余弦定理可以用多面角知识借助综合方法证明，也可以用向量代数中的向量的叉积知识证明.

这里选用的方法主要是综合几何方法，适当兼顾其他方法.

1.5.2　教学方法

选择教学方法至少要考虑三点，即学科特点、学生素质以及教学条件.

(1) 从合情推理到逻辑推理. 在有了较为丰富的空间经验、较好的平面几何和立体几何理论知识上，在教学中可类比平面几何中的有关内容，猜想球面几何的相关结论，然后再推理论证.

(2) 从几何直观到空间想象. 较强的空间想象是本节内容追求的目标之一，也是教学的一个难点，为此，可从培养几何直观能力入手，循序渐进地提升空间想象能力. 观察模型、动手实验、利用信息技术等都对教学效果的提高大有裨益.

(3) 从实践中来到实践中去. 球面几何知识与人类的生产、生活密切相关，有很大的实用价值，在教学中可借助实际例子提出问题，说明概念的产生；不仅如此，通过实际应用又能使学生切实体验和感受到球面几何的实际应用价值，可谓一箭双雕.

1.5.3　学习方法

(1) 类比推广是这里重要的思想方法，在每一学习阶段都要注意球面几何的

哪些性质可以看做是圆的性质的推广，哪些性质又是球面几何特有的，注意平面几何与球面几何哪些性质是类似的，哪些性质又是不同的.

(2) 化归转化是普遍实用的方法，对球面几何的学习当然也不例外. 如球面角转化为二面角、二面角再转化为平面角，球面三角形边角关系的研究可转化为对三面角边角关系的研究. 通过化归转化把球面几何问题转化为欧氏几何问题.

(3) 由直观起步培养空间想象能力. 球面几何的学习需要一定的空间想象能力，我们可以借助见到的或想到的实物形状、几何图形来直接感知，再想象描述数学问题，从而逐步探索出解决问题的思路.

§2 预备知识

学习球面几何，它需要具备必要的平面几何知识和立体几何知识，其中立体几何中的三面角知识在研究球面三角形中用处较大，利用它可以把球面三角形中的边长、夹角、全等等问题化归为欧氏几何中的三角形问题. 遗憾的是现行高中立体几何课程中没有三面角知识，在此作简单的介绍，详细的知识可参见初等几何方面的书籍.

定义 13.1 从一点 S 顺次引出不共面的三条射线 SA，SB，SC 以及相邻两条射线所成角的内部成的图形叫三面角.

三面角的性质：

(1) 三面角的任何一个面角小于其他两个面角之和，而大于其他两个面角之差.

(2) 三面角的三个面角之和小于 2π.

(3) 三面角的三个二面角之和小于 3π 且大于 π.

(4) 三面角中，若两个面角相等，则它们所对的二面角也相等，反之也成立；若三个面角相等，则三个二面角也相等，反之也成立.

(5) 三面角中，若两个二面角不相等，则所对两个面角也不相等，且大二面角所对的面角较大，反之也成立.

定义 13.2 三面角的全等

(1) 如果一个三面角的三个面角与另一个三面角的三个面角分别对应相等，那么这两个三面角全等.

(2) 如果一个三面角的两个面角及其所夹的二面角与另一个三面角的两个对应面角及其所夹的二面角分别对应相等，那么这两个三面角全等.

(3) 如果一个三面角的两个二面角及其公共面角与另一个三面角的两个二面

角及其公共面角分别对应相等，那么这两个三面角全等.

§3　球面几何的基础知识

3.1　球面

3.1.1　球面的含义

定义 13.3　空间内到一个定点的距离等于定长的点的集合叫球面，半径为 1 的球面叫单位球面.

后面我们将研究单位球面上图形的性质和度量，因为半径为 R 的球面三角形的性质以及有关长度、角度、面积等的公式都可以从单位球面上三角形的相应公式得出，具体的做法是角度不变，长度乘以 $\frac{1}{R}$，面积乘以 R^2. 例如，单位球面三角形 ABC 的面积为 $(A+B+C-\pi)$，而相应的半径为 R 的球面三角形的面积为 $(A+B+C-\pi)R^2$.

定义 13.4　过球心的直线与球面交于 A, B 两点，称 A, B 为一对对径点，线段 AB 叫直径. 球面与平面的区别：

平面：开放、无界、平直.

球面：封闭、有界、弯曲.

定义 13.5　过球心的平面与球面相交所得的圆叫大圆. 不过球心的平面与球面相交所得的圆叫小圆.

3.1.2　球面性质

(1) 轴对称

1) 含义：设 C 是球面上的大圆，P 是球面上任一点，过 P 作一个与 C 垂直的大圆 C'，垂足为 T，在 C' 上取一点 P'，使得 P' 与 P 在 C 的两侧，且 $d(T, P') = d(T, P)$，称 P 和 P' 关于 C 轴对称.

2) 性质：在球面上，若 P 和 P'，Q 和 Q' 都关于大圆 C 对称，则 $d(P, Q) = d(P', Q')$.

(2) 中心对称

球面关于球心中心对称.

3.1.3　直线、平面与球面的位置关系

直线和球面的位置关系有三种：相交、相切、相离.

定理 13.1 球面上的圆幂定理

(1) 切割线定理：$PA^2 = PB \cdot PC$.

2) 相交弦定理：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

平面与球面的位置关系有三种：相交、相切、相离.

3.1.4 极与赤道

在球面上任取一点 A，过球心 O 且垂直与半径 OA 的平面截球面得到大圆 L_A，称 A 为极点，简称极，L_A 称为极点在球面上 A 的赤道圆，简称赤道.

通过 A, B 两点的大圆上劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度，叫球面上 A、B 两点的球面距离，记为 $d(A, B)$.

球面距离的性质

性质 1 在球面上连结两点的所有曲线之长以球面距离为最短.

证明：过 A、B 两点作任意曲线 $ACD \cdots GB$，于是得到无穷个无穷小的弧 $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\cdots$, $\overset{\frown}{GB}$.

由于这些弧非常小，我们可以把它们看作是大圆弧.

把 A, C, D, $\cdots$, G, B 各点与球心 O 连结起来，得到多面角 $O\text{-}ACD \cdots GB$.

$\therefore \angle AOB < \angle AOC + \angle COD + \cdots + \angle GOB$,

$\therefore \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \cdots + \overset{\frown}{GB}$.

即 $\overset{\frown}{AB}$ 小于曲线弧.

性质 2 球面上两点 A、B 球面距离 $d(A, B)$ 等于它们的对径点 A'、B' 的球面距离 $d(A', B')$.

证明略.

3.2 球面上的基本图形

3.2.1 球面上的直线

球面上的大圆称为球面上的直线.

这和我们已经知道的平面上的直线有何区别？我们将通过表 1 进行对比.

表 1 平面上的直线与球面上的直线对比表

平面上的直线	球面上的直线
无端点，不封闭	无端点，封闭
过不同两点可作唯一的直线	若两点是对径点，可作无数条直线；若两点不是对径点，可作唯一条直线

续表

平面上的直线	球面上的直线
任意两条直线相交或平行	任意两条直线必相交
过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行	过直线外一点，没有任何一条直线和已知直线平行

定义 13.9 如果球面上一条直线 L_1（大圆）过另一条直线 L_2（大圆）的极，称 $L_1 \perp L_2$.

3.2.2 球面角

定义 13.10 过球面上任意一点 A 作两条大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$，它们构成的图形叫球面角，记为 $\angle BAC$.

球面角的度量是用二面角来度量的.

垂直的另一种定义：两个大圆相交形成的球面角为 $\frac{\pi}{2}$ 时，就说两个大圆垂直，即两条直线垂直.

定义 13.11 球面角 $\angle BAC$ 的两边 AB，AC 延长后相交于对径点 A' 所组成的图形 $ABA'C$ 称为球面二角形（月形）.

球面二角形的面积：$S_A = 2R^2$.

定义 13.12 A，B，C 是球面上不在同一大圆上的三点，且两两不是对径点，把三条大圆劣弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 顺次相连结构成的封闭图形称为球面三角形.

和平面上一样，对球面的研究都集中到了对球面三角形的研究，涉及的问题也是边角关系、面积、全等与相似、解球面三角形等. 利用下述三个重要关系，即通过三面角的中介关系就能把球面上的三角形问题转化为欧氏平面上的三角形问题.

三面角与球面三角形的关系：

(1) 分别连结球心 O 与球面三角形 ABC 的三个顶点 A，B，C 就得到一个三面角 $O-ABC$.

(2) 单位球面三角形的边长由三面角的面角唯一确定.

(3) 单位球面三角形的内角由三面角的二面角唯一确定.

3.2.3 球极三角形

定义 13.13 球面 $\triangle ABC$，边 BC 所在大圆对应的极点为 A'，A''，边 AC 所在大圆对应的极点为 B'，B''，边 AB 所在大圆对应的极点为 C'，C''，且 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 在同一个半球内，称 $\triangle A'B'C'$ 为 $\triangle ABC$ 的极对称三角形，简称球极

三角形.

球极三角形性质:若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$互为极对称三角形,且它们的内角和边长分别为$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, a, b, c,和$\angle A'$, $\angle B'$, $\angle C'$, a', b', c',则$a' = \pi - \angle A$, $b' = \pi - \angle B$, $c' = \pi - \angle C$, $a = \pi - \angle A'$, $b = \pi - \angle B'$, $c = \pi - \angle C'$.

证明:延长三角形 ABC 的边 AC 和 AB 交 $B'C'$ 于 D, E 两点,

$$a' = \overset{\frown}{B'E} + \overset{\frown}{C'D} - \overset{\frown}{DE}. \quad ①$$

$\because$ A 的极线是 a',

$\therefore \angle AOD = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOE = \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \angle A = \angle DOE$.

又 $\angle DOE = \overset{\frown}{DE}$, $\therefore$

$$\angle A = \overset{\frown}{DE}. \quad ②$$

又$\because$ B'的极线是AC, $\therefore$

$$\overset{\frown}{B'E} = \frac{\pi}{2}. \quad ③$$

同理 $\overset{\frown}{C'D} = \frac{\pi}{2}$. ④

把②、③、④代入①,得 $a' = \pi - \angle A$.

同理可证其余式也成立.

3.2.4 球面三角形研究

边角关系

(1) 球面三角形中,两边之和大于第三边,两边之差小于第三边.

(2) 球面三角形中,等角对等边,等边对等角,大角对大边,大边对大角.

球面三角形的面积

(1) 探究:

① 用切西瓜的方法把单位球面平均分为 8 个全等的三角形,显然每个三角形的面积为 $\frac{1}{8} \times 4 \times \pi = \frac{\pi}{2}$,记其中一个三角形为$\triangle ABC$,因为$\triangle ABC$的三边两两垂直,所以其内角为$\frac{\pi}{2}$,于是$\triangle ABC$的面积为 $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = A + B + C - \pi$,其中 A, B, C 为$\triangle ABC$的三个内角. 可见,此时球面三角形的面积等于它的三个内角和减去 π.

② 再过北极切两刀,使过北极的每一个角都是$\frac{\pi}{3}$,这样就把单位球面平均分

为 12 个全等的三角形，显然每个三角形的面积都为 $\frac{\pi}{3}$，于是有 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\pi=A+B+C-\pi$. 可见，此时又有球面三角形的面积等于它的三个内角和减去 π.

(2) 猜想：

一般情况下，球面三角形的面积等于它的三个内角和减去 π.

(3) 证明：因为

$$S(ABC)+S(A'BC)+S(ABC')+S(A'BC')=2\pi,$$

$$\begin{cases}S(ABC)+S(A'BC)=2A,\\ S(ABC)+S(AB'C)=2B,\\ S(ABC)+S(ABC')=2C,\end{cases}$$

所以

$$2S(ABC)=2(A+B+C)-2\pi,$$

所以

$$S(ABC)=A+B+C-\pi.$$

球面三角形的内角和

(1) 球面三角形的内角和大于 π.

(2) 问题：球面三角形内角和是不是任意大？

球面三角形全等

(1) 全等的定义：在同一球面或等球面上，两个球面三角形的对应边和对应角分别相等，则称这两个球面三角形全等.

(2) 性质：在同一个球面上，对称的两个球面三角形全等.

(3) 判定定理：SSS、SAS、ASA、AAA.

(4) 与平面几何对比：在同一个球面上不存在相似三角形，或者说“相似”三角形必全等.

3.2.5 解球面三角形

(1) 边的余弦定理

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$
$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B,$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

(2) 角的余弦定理

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$
$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b,$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.$$

(3) 正弦定理

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

§4 平面几何与球面几何的区别与联系

4.1 平面几何与球面几何的区别

我们对平面几何与球面几何的区别进行了整理，其结果见表 2.

表 2 平面几何与球面几何的区别

比较对象	平面几何	球面几何
直线	过两点间有唯一一条直线	过两个非对径点有唯一一条直线(大圆)
	直线可以无限延伸	大圆是封闭的、有限的
角的含义	两直线的交角	两个大圆在交点处切线的交角(即两个大圆所在平面的二面角的平面角)
两点间距离含义	连结它们的直线段长度	过两点的大圆中的劣弧弧长
三角形内角和	等于 180°	大于 180°
三角形面积	底边长乘高线长的一半	$S(\triangle ABC)=A+B+C-\pi$ 其中 A, B, C 为单位球面上三角形的三个内角(弧度制)
合同性(全等条件)	SSS, SAS, ASA	SSS, SAS, ASA, AAA
相似性	存在不全等的相似三角形	同球面或等球面上没有相似三角形
平行性	过直线外一点有且只有一条直线与之平行	过直线外一点没有直线与之平行
勾股定理	$a^2=b^2+c^2$	$\cos a=\cos b\cos c$
余弦定理	$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$	$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$ $\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$ $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$ $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$ $\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b$ $\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$
正弦定理	$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$	$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$

4.2 平面几何与球面几何的联系

(1) 联系的表现：二者都具有以下性质：

1) 直线：都是两点间最短路径.

2) 三角形全等的条件：SSS，SAS，ASA.

3) 边的关系：大边对大角，大角对大边.

两边之和大于第三边.

两边之差小于第三边.

(2) 联系的原因：人类生活在地球这样半径极大的球面上，可以认为局部区域与平面区域差不多，而平面几何正是人类在这种对局部球面几何认识基础上发展起来的几何学.

例如，当半径 R 趋近于 $+\infty$ 时，球面三角形 $\triangle ABC$ 的面积 S 一定是 $A+B+C-\pi=\frac{S}{R^2}$ 趋向于零，即三角形内角和 $A+B+C$ 趋向于 π.

同样，当半径 R 趋近于 $+\infty$ 时，球面三角形中的余弦定理和正弦定理就转化为平面三角形中的余弦定理和正弦定理.

§5 欧拉公式与闭曲面的分类

使用变换对几何图形进行分类，是几何学的重要内容，揭示在不同变换下几何图形的不变性质或不变量是研究这类问题的基本思想方法. 这里我们主要讨论欧拉公式和欧拉示性数等重要的拓扑不变量，并利用它们对曲线、曲面进行分类.

5.1 欧拉公式

1750 年，欧拉在给哥德巴赫的一封信中，列举了多面体的一些性质，其中，有一条是：**如果用 V，E 和 F 分别表示闭的凸面体的顶点数、棱数和面数，则有 $V-E+F=2$. 后人称为欧拉定理.**

欧拉在这封信后的第二年给出了一个证明，这个证明现在不得而知，不过这里可以给出几个后人的证明.

5.2 证明方法——拓扑

欧拉定理的几个证明都与拓扑变换有关，而欧拉对拓扑学的研究也具有当时的世界一流水平. 最著名的例子是欧拉在 1735 年用简化的表示法解决了著名的哥尼斯堡七桥游戏问题：如图 1 所示的是流经哥尼斯堡的普雷格尔河某个河湾处的

地图，有七座桥将普雷格尔河中两个岛及岛与河岸连结起来. 问是否可能从这四块陆地中任一块出发，恰好通过每座桥一次，再回到起点？欧拉用点表示岛和陆地，两点之间的连线表示连结它们的桥(如图 2)，将河流、小岛和桥简化为一个网络，把七桥问题化成判断连通网络能否一笔画的问题. 他不仅解决了此问题，且给出了连通网络可一笔画的充要条件是它们是连通的，且奇顶点(通过此点弧的条数是奇数)的个数为 0 或 2.

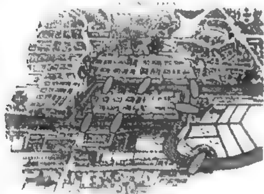


图 1

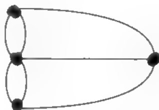


图 2

欧拉所用的简化图形的巧解方法，就是拓扑变换的一种.

拓扑学是数学的一个分支，它是研究图形在连续变形下的不变性质的，这种不变性质称为“拓扑性质”. 例如画在橡皮膜上的图形，当不破裂或折叠时，曲线的闭合性，两条曲线的相交性等性质保持不变. 这些性质就是拓扑性质. 欧拉定理是拓扑学中的一个基本定理.

5.3 欧拉定理的证明

证法一：一般分下面两步进行：

(1) 将多面体的表面去掉一个面，经过拓扑变形重叠在一个平面上形成平面图形. 相当于假设凸多面体由弹性极好的橡皮薄膜做成，先剪去它的一个面，把余下的表面展开在一个平面上，得到一个平面网格. 例如，把六面体 EC 的表面去掉一个面 S(面 $ABCD$)，剩下的面、边和顶点可变形为一个平面图形，而这个平面图形内部又分割为若干个多边形(四边形 $AEFB$, $BFGC$, $CGHD$, $DHEA$, $EFGH$).

由上面的变形情况可知：原多面体的表面数 F 比变形成平面图形后分割出来的多边形面数 F_1 多 1，即 $F = F_1 + 1$，而顶点数 V 和棱(边)数 E 经过变形后都没有变化.

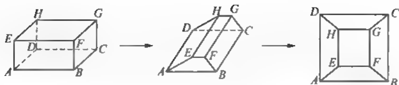


图3

(2) 将上述的平面图形按适当的顺序去掉多边形、边和顶点. ①如图4,在分割出的多边形中,将不与其他多边形共界的"1"号边 AB 拿掉,这样就去掉了以它为边的四边形 $AEFB$. 再从剩下的图形中拿掉"2"号边 BC,这样又去掉了四边形 $BFGC$. 用同样的方法按编号顺序继续进行,最后成为树枝形.

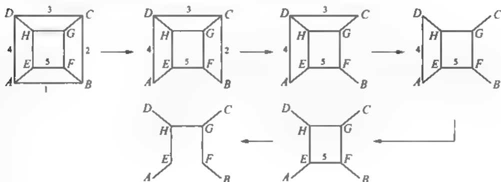


图4

② 如图5,再将树枝形的端边(指图形中只和其他部分在一端连结的边)中的"1"号端边 FB 拿掉,这样就拿掉一个端点 B. 用同样的方法按编号依次进行,操作到棱数 $E=1$ 为止. 也就是说最后剩下一条线段 AE. 这时 $E=1$, $V=2$.

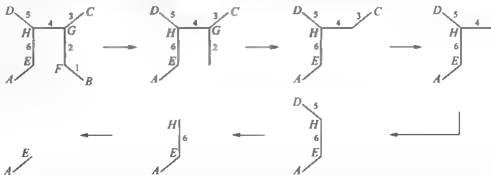


图5

由上面(2)中的变化情况可知:反复进行操作①时,顶点数 V 没有变化,面数

F_1 与棱(边)数 E 的差 F_1-E 的值也没有变化;反复进行操作② 时,F_1 总是 0,$V-E$的值没有变化.因此 $F_1+V-E=1$.

综合(1)(2)中分别得到的 $F=F_1+1$, $F_1+V-E=1$,可得$V+F-E=2$.

证法二:(俗称三角剖分法)我们假设凸多面体由弹性极好的橡皮薄膜做成,先剪去它的一个面,把余下的表面展开在一个平面上,得到一个平面网格.于是平面网格中的顶点、边与原凸多面体的顶点、棱相等,只相差一个多边形(即面),因此只要证明:$V-E+F=1$.

将所得到的平面网格进行三角剖分,即将网格中的多边形分解成三角形,且三角形以原多边形的顶点为顶点.如原来为一个 n 边形,三角剖分后,变成 $n-2$个三角形,顶点数不变,面增加了 $n-3$ 个,边增加了 $n-3$ 条,故还是只要证明 $V-E+F=1$.

然后逐个抹去网格中的三角形.抹去方法为:

(1) 当三角形中只有一条边是平面网格的边界时,抹去不属于其他三角形的部分(包括边、顶点);

(2) 当只有两条边不属于其他三角形的边时,抹去一个顶点,两条边(棱),一个面.

如图 6,在$\triangle DGC$ 中,边 DC 是网格边界,且不属于其他三角形,故将编号为"1"的 DC 抹去,这样就去掉了以它为边的$\triangle DGC$;同理可以抹去编号为"2、3、4"的边,同时去掉了三个三角形.此时,边 DH、DG 与点 D 为先按照以上的抹去方法,只要证明抹去若干边和顶点后的图形仍有 $V-E+F=1$. 而按照上述抹去方法,最后得到的是一个三角形,$V=3$, $E=3$, $F=1$,故 $V-E+F=1$ 成立.

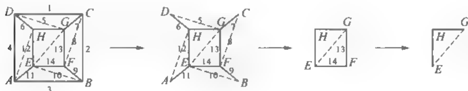


图 6

证法三:在凸多面体 P 所包围的空间内部,任取一点 O,作一个以 O 为球心,半径是单位长的球面 S,然后,P 上的任意一点 x 与球心决定一条以O 为端点的射线,这条射线必定与球面 S 相交于一点,而且只相交于一点 y.

通过这样的投影,P 上所有面的投影像,将不重叠地盖满球面;并且 P 的一个 n 边形面的像是球面上的一个球面 n 边形,P 上的 F 个面,E 条棱,V 个顶点也投影成球面上 F 个球面多边形,E 条棱(大圆的弧)和 V 个顶点.

公式:单位球面 n 边形的面积 $W=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-(n-2)\pi$，$\alpha_i$ 表示球面 n 边形第 i 个内角.

证明：$1^\circ n=2$ 时(图 7)，$ACA'BA$ 为球面二边形，二面角两内角相等，为 α.

过 A 作大圆 ACA' 的切线 AC_1，过 A 作大圆 ABA' 的切线 AB_1，$\angle B_1AC_1=\alpha$. 则右边 $=2\alpha-0=2\alpha$，又 $W=\dfrac{\alpha}{2\pi}\cdot 4\pi=2\alpha$，故右=左.

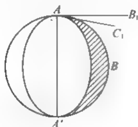


图 7

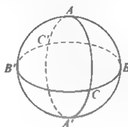


图 8

$2^\circ n=3$ 时(图 8)，由 1° 得：

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'BC}=2\alpha,$$
$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle B'AC}=2\beta,$$
$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle C'AB}=2\gamma,$$

所以

$$2S_{\triangle ABC}+(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'AC}+S_{\triangle C'AB})=2(\alpha+\beta+\gamma),\ (*)$$
$$(*)\text{左边}=2S_{\triangle ABC}+2\pi=2(\alpha+\beta+\gamma),$$

所以
$$S_{\triangle ABC}=\alpha+\beta+\gamma-\pi.$$

$3^\circ n>3$ 时，n 边形可将球分成 $n-2$ 个球面三角形，这 $n-2$ 个球面三角形的内角记为 α_i，β_i，γ_i，面积记为 S_i，n 边形面积记为 S，

$$S=\sum_{i=1}^{n-2}S_i=\sum_{i=1}^{n-2}(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i-\pi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-(n-2)\pi.$$

所以公式成立，
$$S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-(n-2)\pi.$$

下证：$V-E+F=2$.

有 V 个顶点，每个顶点处各面的在该顶点的内角和为 2π. 故所有面的内角和为 $2\pi\cdot V$，记 S_i 为 n_i 边形.

又 $$S_1+S_2+\cdots+S_F=\sum_{i=1}^{F}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}-(n_i-2)\pi\right)=4\pi,$$
$$=\sum_{i=1}^{F}\left(\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\right)-\pi\sum_{i=1}^{F}n_i+2F\pi=4\pi,$$

所以

$$2\pi V-\pi\cdot\sum_{i=1}^{F}n_i+2F\pi=4\pi.$$

因为

$$\sum_{i=1}^{F}n_i=2E,$$

所以

$$2\pi V-2\pi E+2\pi F=4\pi,$$

所以

$$V-E+F=2.$$

5.4 欧拉公式的一个重要应用——有且只有五种正多面形

[illegible] 如果一个多面形，每个面都是 $n(n\geqslant 3)$ 边形，而且每个定点都是 $m(m\geqslant 3)$ 条棱的公共点，我们称这样的多面形为正多面形.

定理 13.2 凸正多面形有且只有五种，记多面形的面数为 F，每个面是 $n(n\geqslant 3)$ 边形，每个定点都是 $m(m\geqslant 3)$ 条棱的公共点，那么 F, n, m 只有以下五种可能：

F	4	8	20	6	12
n	3	3	3	4	5
m	3	4	5	3	3

证明：设正凸多面形有 V 个顶点，E 条棱，F 个面，则有

$$nF=2E,\ mV=2E.$$

$\because V-E+F=2$,

$\therefore mV-mE+mF=2m$,

$\therefore 2E-mE+mF=2m$,

$\therefore 4E-2mE+2mF=4m$,

$\therefore 2E(2-m)+2mF=4m$,

$\therefore (2-m)nF+2mF=4m$,

$\therefore (2n+2m-mn)F=4m>0$,

$\therefore mn-2m-2n<0$,即$(m-2)(n-2)<4$.

又$\because m\geqslant 3,\ n\geqslant 3$,

$\therefore$ 只有 $\begin{cases}n=3,\\m=3,\end{cases}$ $\begin{cases}n=3,\\m=4,\end{cases}$ $\begin{cases}n=3,\\m=5,\end{cases}$ $\begin{cases}n=4,\\m=3,\end{cases}$ $\begin{cases}n=5,\\m=3\end{cases}$,五种情况.

5.5 闭曲面的分类

[illegible] 闭多面形是由有限个平面多边形(不必凸)拼合而成的一个图形,其拼合方式需满足下面四个条件:

(1) 它的每两个顶点可以由它的一些棱所组成的折线连结起来;

(2) 它的每两个面或者没有公共点,或者恰有一个公共顶点,或者恰有一条公共的棱;

(3) 它的每条棱恰是它的两个面的公共棱;

(4) 它的每个顶点都是锥形的顶点,即每一个顶点处的棱和面可记为:l_1, α_1, l_2, α_2, $\cdots$, l_n, α_n, l_1,其中 l_i 表示该顶点处的棱,α_i 表示该顶点处的面.

当且仅当一个多面形满足以上四条时,我们称这个多面形为闭多面形.

以上四条分别对闭多面形的点、面和棱的特点进行了规定. 如图 9,不满足第(4)条,因为它中间的一个顶点不是锥形顶点;图 10 则以上四条均不满足!

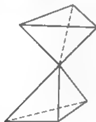


图 9

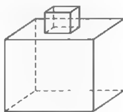


图 10

方法:将多面形看成是用橡皮薄膜做成的,在多面形某处进行充气,如果可以将整个图形充满气,则是闭多面形.

闭曲面充气后,有的可以变成一个球体,有的可以变成类似车胎的曲面——我们称之为环面.

像环面这样,有一个“洞”的闭曲面,我们称之为亏格为一的闭曲面.

所以,对于一个曲面,我们首先用本节开头的四条去判断它是否为闭曲面. 如果确定为一个闭曲面,我们用橡皮变换的方法,判断该闭曲面有几个亏格. 有 n 个

亏格，则称该闭曲面为亏格为n的闭曲面.

本章思考题

1. 简要叙述为什么要开设"球面几何"这一专题.
2. 请列出欧氏几何和球面几何的知识结构框图，并对二者的主要内容作简单的比较.
3. 你认为欧氏几何、罗氏几何、球面几何这三种几何的最大区别是什么？产生这一区别的原因是什么？
4. 球面几何这一专题的主要研究方法是什么？
5. 为什么要建立非欧几何模型？

本章参考文献

[1] 邓明立，张红梅. 群论统一几何学的历史根源[J]. 自然辩证法通讯，2008(1).

[2] 邓鹤年，姜树民. 几何学的发展与初等几何方法研究[J]. 松辽学刊(自然科学版)，2001(1).

[3] 李文林. 数学史概论[M]. 高等教育出版社，2002.

[4] 维克多·卡兹著，李文林等译. 数学史通论[M]. 高等教育出版社，2004.

[5] M·克莱因著，张理京译. 古今数学思想[M]. 上海科学技术出版社，2002.

[6] M·克莱因著，张祖贵译. 西方文化中的数学[M]. 复旦大学出版社，2007.

[7] M·贝尔热著，周克希等译. 球面、双曲几何与球面空间[M]. 科学出版社，1991.

[8] 邵品琮. 漫谈几何学[M]. 科学出版社，1986.

[9] 郑崇友，王汇淳等. 几何学引论[M]. 高等教育出版社，2000.

[10] 项武义. 几何学的源起与演进[M]. 科学出版社，1983.

[11] 项武义. 古典几何学讲义[M]. 科学出版社，1983.

[12] 项武义等. 古典几何学[M]. 复旦大学出版社，1986.

[13] 左铨如，季素月. 初等几何研究[M]. 上海科技教育出版社，1992.

[14] 梁希泉. 几何学[M]. 东北师范大学出版社，2000.

[15] 罗伯特·莫里斯编，人民教育出版社数学室译. 几何教学[M]. 人民教育出版社，1988.

[16] 张楚廷. 数学文化[M]. 高等教育出版社，2000.

[17] 张顺燕. 数学的源与流[M]. 高等教育出版社，2000.

[18] 李光汉. 球面几何及其应用(Ⅰ)[J]. 中学数学，2005(4).

[19] 李光汉. 球面几何及其应用(Ⅱ)[J]. 中学数学，2005(5).

[20] 蒋声.球面上的几何[M].湖南教育出版社,2005.
[21] 周建伟.球面上的几何[M].江苏教育出版社,2006.
[22] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验稿)[M].人民教育出版社,2003.
[23] 课程标准研制组编写.数学课程标准解读(实验稿)[M].北京师范大学出版社,2004.

第十四章　风险与决策

在日常生活和经济活动中，经常需要对事物的进展情况作出决策，以便用最有利的方式采取行动. 例如，个人的采购、求职、投资，工商企业的生产或经营的方案，直至部门和全国的某一事业的计划. 由于事物的进展情况和信息往往受随机因素的影响，不能确切预料，决策往往带有风险. 在这种情况下，决策者通常有很多行动方案可以采用，而统计决策方法可以提供最优的行动方案，大大减少由于盲目地决定而导致的损失. 因此，统计决策方法和统计决策分析将会在社会的发展和进步中发挥越来越大的作用.

在现代社会中，公民应该具有合理的决策头脑. 因此，本章围绕全国高中数学课程标准的要求从日常生活及经济活动中的实例分析，让学生养成重视风险的意识，理解风险决策的必要性和重要性，理解风险决策的概念. 从实例理解损益函数与损益矩阵，探索决策的途径与方法，理解决策结论的意义. 学会用决策树表示需要决策问题的有关信息，能用反推决策树的方法进行决策. 通过实例理解风险决策灵敏度分析的意义，会进行决策的灵敏度分析. 通过实例了解马尔科夫型决策及其决策方法.

§1　决策论简介

决策分析是人们为了达到预期的目的，从所有的可供选择的多个方案中，找出满意的方案的一种活动. 决策分析是在应用数学和统计原理相结合的基础上发展起来的，在经济及管理领域有着非常广泛的应用. 下面就决策分析中涉及的决策程序、要素、损益矩阵、决策分析的分类等重要概念进行说明.

首先介绍决策程序. 所谓决策程序就是在作出决策时所需要考虑的几个步骤，主要包括以下六个，即：明确问题，确定目标；调查研究，搜集情报；分析资料，预测未来；制定可行方案；评价和选择最优或满意的方案；组织实施与校正控制.

接下来介绍决策分析的要素. 决策分析包含以下四个要素，即

(1) 可行方案集：

$D=\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}(m\geqslant 2)$，其中 d_i 表示第 i 个可行方案，$i=1, 2, \cdots, m$.

(2) 自然状态集：

$H=\{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$，其中 h_j 表示第 j 种自然状态，$j=1, 2, \cdots, n$.

(这里的自然状态是指决策者在所面临的决策问题中无法预知或无法控制的不确定因素)

(3) 自然状态概率集：

$P(H)=\{P(h_1), P(h_2), \cdots, P(h_n)\}$，满足

$$P(h_1)+P(h_2)+\cdots+P(h_n)=1,\ P(h_j)\geqslant 0,\ j=1, 2, \cdots, n.$$

(4) 损益矩阵：

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，其中 $a_{ij}=l(d_i, h_j)$ 是方案 d_i 在自然状态 h_j 发生时所获得的损失或收益. $i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$.

最后介绍一下决策分析的分类.根据信息的多少，我们常把决策按决策问题的性质分为确定型决策、不确定型决策和风险型决策三类.具体说来，所谓确定型决策就是在决策环境完全确定的条件下进行的决策.所谓不确定型决策就是对于各自然状态发生的概率一无所知，依靠决策者的主观倾向进行的决策.所谓风险型决策就是在决策环境不是完全确定的情况下进行的决策.对于各自然状态发生的概率，决策者可以预先估计或计算出来.下面我们对风险型决策进行重点讨论.

§2 风险型决策

关于风险型决策，我们将从表示方法、决策方法以及对它的评估三个方面进行讨论.

2.1 风险型决策问题的表示

决策问题通常有两种常用的表示，即决策表和决策树.

用表 1 所表示的称为决策表.它是一个二维表，横向表示 n 种自然状态，纵向表示 m 种可行性方案，中间就是一个损益矩阵.

表 1　决策表

损益 可行方案 \ 自然状态	h_1	h_2	$\cdots$	h_n
d_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
d_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
d_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

与决策表相类似的还有决策树，它是一种分析工具. 它可以把未来情况及其概率、损益值等可供决策的内容，简单直观地反映在树枝状图形即决策树上，通过计算比较各决策方案在各种状态下的平均期望值来选择期望值最大的方案.

决策树具有：(1)便于有次序、有步骤、直观而又周密地考虑问题；(2)便于集体讨论和决策；(3)便于处理复杂的问题等三大优势.

决策树由决策点、状态点、方案枝和概率枝组成，其形状如图 1 所示.

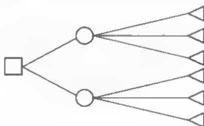


图 1

□——**决策点**，从它引出的分枝为方案分枝，分枝数反映可能的方案数.

○——**状态点**，节点上方注有该方案的期望值. 从它引出的分枝为概率分枝，每个分枝上注明自然状态及其出现的概率，分枝数反映可能的自然状态数.

△——**事件结点**，又称“末梢”. 它的旁边注有每一方案在相应状态下的损益值.

2.2　风险型决策中决策方法

风险型决策中有两种常用的决策方法：期望收益决策法与决策树法. 下面通过例题加以说明.

例 1　某同学需要做一项实验，在该项实验过程中出现设备过热现象的概率为 0.2. 请专家指导实验，需支付 50 元指导费，并且出现设备过热现象时会损失 10

元；自己独立完成实验，出现设备过热现象时会损失 100 元. 如果在实验过程中没有出现过热现象，则不会造成损失. 问该同学是否应该请专家指导实验？

分析与解：

决策目标：使损失最小.

行动方案：d_1：请专家指导实验；

d_2：独立完成实验.

自然状态：h_1：设备没有出现过热现象；

h_2：设备出现过热现象.

决策：采取哪种行动方案？ 可供选择的是期望收益决策法和决策树法.

如果选用期望收益决策法，我们看结果如何.

所谓期望收益决策法是以不同方案的期望收益作为择优的标准，选择期望收益最大的方案为最优方案. 它的步骤是先列出决策表再计算各方案的损益值，从而作出决策. 具体如下：

(1) 列出决策表(表 2).

表 2 决策表

状态 / 损益 / 行动方案	$h_1(0.8)$	$h_2(0.2)$
d_1	−50	−60
d_2	0	−100

说明：表中的括号是出现状态 h_1 和 h_2 的概率，分别是 0.8 和 0.2.

(2) 计算各方案的损益值.

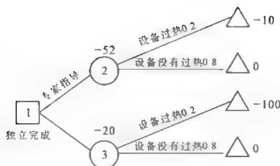
在本例中，行动方案 d_1 和 d_2 对应的损失均值分别为

$$\begin{aligned}E(l(d_1, h)) &= l(d_1, h_1)\times P(\text{执行 } d_1,\text{出现 } h_1)+\\ &\quad l(d_1, h_2)\times P(\text{执行 } d_1,\text{出现 } h_2)\\ &=-50\times 0.8+(-60)\times 0.2=-52(\text{元}).\\ E(l(d_2, h)) &= l(d_2, h_1)\times P(\text{执行 } d_2,\text{出现 } h_1)+\\ &\quad l(d_2, h_2)\times P(\text{执行 } d_2,\text{出现 } h_2)\\ &=0\times 0.8+(-100)\times 0.2=-20(\text{元}).\end{aligned}$$

根据决策表和以上的运算，那么选择损失小的那个行动方案，即独立完成实验.

如果选用决策树法，则步骤是：

(1) 画出决策树.



(2) 计算各结点的期望收益,分别为－52 和－20.

(3) 进行决策:独立完成实验.

综上所述,不管选用哪种方法,最后的决策都是选择独立完成实验方案.

上面利用决策树决策主要步骤具体说来有三个,它们分别是:

第一步,根据具体问题画出图形.在画决策树时,一般按由左到右的顺序进行.

第二步,计算各方案的期望值.在计算期望值时,要注意由右向左反顺序依次进行.用各种自然状态下的收益值乘以各自的概率值,在遇到机会结点时,计算各分枝期望值的和,并将其标示在机会结点上.然后,再将每个机会结点上的数值与其前面方案枝上的数值相加减,哪个方案枝上的总和数值最大,就把最大的数值记在决策点上.

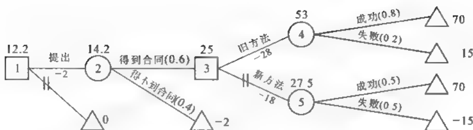
第三步,剪枝.剪枝是方案的优选过程,根据不同方案期望值的大小,从左向右,逐一比较.期望值较大的为较优方案得以保留,期望值较小的方案予以舍弃,在舍弃的方案枝上画一"‖".通过比较舍弃,最后只能剩下一个方案枝,该枝代表的方案就是最优方案.

对于多层决策问题,决策树法更直观.

例2 某科学技术研究所考虑向某企业提出一种新产品的建议.为提出此建议需要进行一些初步的调研工作,并投入 2 万元.该技术研究所根据以往的经验以及对此企业的产品和竞争者的了解,估计建议提出后,有 60%的把握可以得到合同.如果得不到合同,则损失 2 万元的前期投入.新产品有两种开发方法:旧方法需要花费 28 万元,开发成功的概率为 80%;新方法需要花费 18 万元,开发成功的概率仅为 50%.如果技术研究所得到合同并且开发成功,企业将支付给该研究所 70 万元技术转让费;如果技术研究所得到合同但开发失败,该技术研究所将支付给企业 15 万元的赔偿费.试用决策树法为该技术研究所进行决策.

分析与解:

第一步,画出决策树.



第二步，计算各方案的期望值.

状态点 4 处的期望收益：$70 \times 0.8 + (-15) \times 0.2 = 53$(万元).

状态点 5 处的期望收益：$70 \times 0.5 + (-15) \times 0.5 = 27.5$(万元).

在决策点 3 处，根据 $\max\{53 - 28, 27.5 - 18\} = 25$，应选取的决策是采用旧方法开发.

状态点 2 处的期望收益：$25 \times 0.6 + (-2) \times 0.4 = 14.2$(万元).

在决策点 1 处，根据 $\max\{14.2 - 2, 0\} = 12.2$，应选取的决策是提出开发建议.

结论：应该提出开发建议；得到合同后，按照旧方法开发.

关于决策方法除了上面介绍的两种方法以外还有方差收益决策法，下面我们也是通过具体的例子加以说明.

例 3 有一个投资 100 万元的零售企业，其发生火灾的概率为 0.1%. 若发生火灾，该企业将蒙受 100 万元的损失；若购买保险，可以弥补所有的损失，但需交纳 1000 元的保险费. 如果你是企业的决策者，你会选择购买还是不购买？

分析与解：计算发现无论是购买保险还是不购买保险，企业的损失均值都是 1000 元.

购买保险的方差是 0，

不购买保险的方差是

$$(100\,0000 - 1000)^2 \times 0.001 + (0 - 1000)^2 \times 0.999 = 9\,9900\,0000,$$

所以应选择购买保险.

均值体现了随机变量的中心位置，方差体现了随机变量集中于中心位置的程度. 当两个随机变量的均值相同，方差不同时，方差小的更集中于均值的附近，因此应该选择损失方差小的行动方案.

2.3 风险型决策中的效用及效用曲线

所谓效用是指在决策中，决策者的个性、才智、胆识、经验等主观因素，使不同的决策者对相同的损益问题(获取收益或避免损失)做出不同的反应；即使是同一

决策者，由于时间和条件等客观因素不同，对相同的损益问题也会有不同的反应. 决策者这种对于损益问题的独特感受和取舍，称之为“效用”.

效用曲线是用于反映决策者对风险态度的一种曲线，又称“偏好曲线”. 效用曲线就是用来反映决策后果的损益值对决策者的效用(即损益值与效用值)之间的关系曲线. 通常以损益值为横坐标，以效用值为纵坐标，把决策者对风险态度的变化在此坐标系中描点而拟合成一条曲线. 常见的效用曲线分为保守型、激进型、中间型和混合型四种，见图 2.

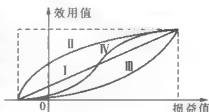


图 2　效用曲线

保守型效用曲线：图 2 中的曲线Ⅱ严格上凸(下凹)表示效用随着消费者收入的增多而递增，但递增速度越来越慢，即边际效用递减，这样的决策者对于亏损特别敏感，而大的收益对他的吸引力却不是很大，这种类型的决策者容易满足，不求大利，只求避风险. 保守型决策者厌恶风险.

激进型效用曲线：图 2 中的曲线Ⅲ是下凸(上凹)的，表示效用随着消费者收入的增多而递增，而递增速度越来越快，即边际效用递增. 曲线中间部分呈下凹形状，表示决策者专注于想获得大的收益而不十分关心亏损，这种类型的决策者不易满足. 激进型决策者喜欢风险.

中间型效用曲线：图 2 中的直线Ⅰ表示决策的效用与决策损益的货币效果成线性关系，对应于这种效用函数的决策者对决策风险抱中立态度，他或是认为决策的后果对大局无严重影响，或者因为该项决策可以重复进行，从而获得平均意义上的成果，因而对决策的某项后果不予特别关注，而谨慎从事. 由于这类效用函数是线性关系，因此，效用期望值最大的方案也已是收益期望值的最大方案. 此时一个非确定性决策的确定等价值就等于它的期望收益.

混合型效用曲线：图 2 中的曲线Ⅳ表示决策者在损益额不太大时，决策者具有一定的冒险胆略，追求风险属于激进型，但当损益额增大到一定数量时，他就转化为厌恶风险的决策者了，变为保守型，其实这种类型更符合实际.

一般在一定的损益水平条件下，决策者认为效用越大，越倾向于保守型；反之决策者认为效用越小，越倾向于风险型.

2.4　风险型决策的敏感性分析

在决策过程中，自然状态出现的概率值变化会对最优方案的选择存在影响. 概率值变化到什么程度才引起方案的变化，这一临界点的概率称为转折概率. 对决策问题作出这种分析，就叫做敏感性分析，或者叫做灵敏度分析.

我们考虑下面表 3 所显示的最简单的决策问题.

表3　简单决策问题

行动方案	自然状态(出现概率)	
	$h_1(p)$	$h_2(1-p)$
d_1	8	7
d_2	14	5
d_3	20	−9

首先假设自然状态 h_1 出现的概率为 0.8,则各行动方案对应的期望收益分别为

$$E(d_1)=8\times 0.8+7\times(1-0.8)=7.8,$$
$$E(d_2)=14\times 0.8+5\times(1-0.8)=12.2,$$
$$E(d_3)=20\times 0.8+(-9)\times(1-0.8)=14.2,$$

此时 d_3 的期望收益最大,所以最佳方案为 d_3.

当自然状态 h_1 出现的概率为 0.2 时,各行动方案对应的期望收益分别为

$$E(d_1)=8\times 0.2+7\times(1-0.2)=7.2,$$
$$E(d_2)=14\times 0.2+5\times(1-0.2)=6.8,$$
$$E(d_3)=20\times 0.2+(-9)\times(1-0.2)=-3.2,$$

此时 d_1 的期望收益最大,所以最佳方案为 d_1.

对于只有两种自然状态的决策问题,无论有多少种备选方案,都可以用图示的方法来进行敏感性分析,为了说明这一过程,首先假定自然状态 h_1 出现的概率为 p,则自然状态 h_2 出现的概率为$(1-p)$,各方案的期望收益分别为

$$E(d_1)=8\times p+7\times(1-p)=p+7,$$
$$E(d_2)=14\times p+5\times(1-p)=9p+5,$$
$$E(d_3)=20\times p+(-9)\times(1-p)=29p-9.$$

以自然状态 h_1 的概率 p 为横坐标,期望收益为纵坐标画出上面三个方程表示的直线,如图3所示.

由图3可以清楚地看出以期望值为标准给出的决策方案是如何随着 p 变化的,当 $p<0.25$ 时,方案 d_1 具有最大的期望收益;当 $0.25<p<0.70$ 时,方案 d_2 具有最大的期望收益;当 $p>0.70$ 时,方案 d_3 具有最大的期望收益.

图形法仅适用于只有两个自然状态的决策问题,当自然状态多于两个时,可以考虑用计算机软件来辅助计算.

敏感性分析的步骤主要有三步:第一步求出在保持最优方案稳定的前提下,自然状态出现概率所变动的容许范围;第二步衡量用以预测和估算这些自然状态概

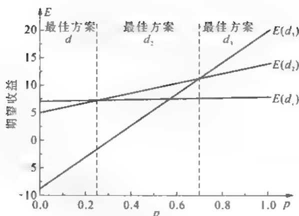


图 3

率的方法，其精度是否能保证所得概率值在此允许的误差范围内变动；第三步判断所作决策的可靠性.

§3 马尔可夫型决策

3.1 马尔可夫性与马尔可夫链

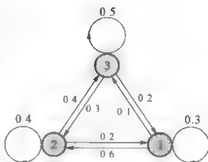
俄国数学家马尔可夫开创了一种无后效性随机过程的研究，即在已知当前状态的情况下，过程的未来状态与其过去状态无关，这就是现在的马尔可夫过程.

这种已知"现在"的条件下，"将来"与"过去"独立的特性称为马尔可夫性（无后效性），具有这种性质的随机过程叫做马尔可夫过程. 马尔可夫过程中的时间和状态既可以是连续的，又可以是离散的. 我们称时间离散、状态离散的马尔可夫过程为马尔可夫链.

马尔可夫过程的基本概念是系统的"状态"和"状态的转移"，马尔可夫过程实际上是将一个系统的"状态"和"状态的转移"定量化了的系统状态转换的数学模型.

荷花池中一只青蛙的跳跃是马尔可夫过程的一个形象化的例子. 假设在一个水池中有三片荷叶，一只青蛙在三片荷叶之间跳跃玩耍，青蛙的动作是随意的. 为了讨论方便，我们给荷叶编号，我们关心的是在一定时间内，青蛙从一片荷叶跳到其他两片荷叶的转移结构. 当青蛙在第 1 片荷叶上时，它下一步动作是跳跃到第 2、3 片荷叶上或原地不动，只与现在的位置有关，而与它以前跳过的路径无关. 我们给出这只青蛙从各片荷叶上向另一片荷叶移动的转移图，箭头表示跳跃的方向，

数字表示跳跃的概率，自环表示青蛙保持不动.



当青蛙开始时刻在第1片荷叶上时，它保持不动的概率为0.3，它跳跃到第2片荷叶上的概率为0.6，跳跃到第3片荷叶上的概率为0.1.

当青蛙开始时刻在第2片荷叶上时，它保持不动的概率为0.4，它跳跃到第1片荷叶上的概率为0.2，跳跃到第3片荷叶上的概率为0.4.

当青蛙开始时刻在第3片荷叶上时，它保持不动的概率为0.5，它跳跃到第1片荷叶上的概率为0.2，跳跃到第2片荷叶上的概率为0.3.

我们以$x(t)$表示青蛙跳跃t次后所处的位置，$x(t)$的取值叫做状态，$S=\{1,2,3\}$叫做状态空间. 我们称$\{x(t)\}(t>0)$为一个随机过程. 当从$x(0)$到$x(t)$已知时，青蛙$t+1$时处在$x(t+1)$状态上的概率仅与t时刻状态有关，即满足以下关系式：

$$P\{x(t+1)=j \mid x(0)=i_0, x(1)=i_1, \cdots, x(t)=i\}=P\{x(t+1)=j \mid x(t)=i\}.$$

我们称满足此式的随机过程$\{x(t)\}(t>0)$为马尔可夫过程或马尔可夫链，而把满足此式的随机过程$x(t)$称为具有马尔可夫性质，它反映了前一状态$x(t-1)$、现状态$x(t)$和后一状态$x(t+1)$之间的链接. 因此，用马尔可夫链描述随机性状态变量的变化时，只需求在某一点上两个相邻随机变量的条件分布就可以了.

马尔可夫链是随机变量$X_1, X_2, X_3, \cdots$的一个数列. 这些变量的范围，即他们所有可能取值的集合，被称为“状态空间”，而X_n的值则是在时间n的状态. 如果X_{n+1}对于过去状态的条件概率分布仅是X_n的一个函数，即

$$P(X_{n+1}=x \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)=P(X_{n+1}=x \mid X_n),$$

这里x为过程中的某个状态. 上面这个恒等式可以被看作是马尔可夫性质.

3.2 转移概率与转移概率矩阵

我们称$P\{x(t+1)=j \mid x(t)=i\}$为转移概率. 由于这种转移概率不依赖于时间，因此具有稳定性，我们用常数p_{ij}来表示. 将各个状态之间的转移概率用一个矩阵表示出来，就得到一个马尔可夫问题（有限状态稳定的马尔可夫过程问题）的数学模型：

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

称矩阵 P 为一步转移概率矩阵，简称转移矩阵. 由于转移矩阵 P 的每行都是独立的分布，所以每行的元素满足下列性质：

$$\begin{cases} p_{ij} \geqslant 0,\ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n; \\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n. \end{cases}$$

由图 3，青蛙跳跃的一步转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

3.3 马尔可夫链的基本方程

马尔可夫性质的数学描述是：对任意的时间 $m,\ L > 0,\ 0 \leqslant m_1 < m_2 < \cdots < m_t < m$，及任意的状态，都有

$$P\{x(m+L) = j \mid x(m_1) = i_1,\ \cdots,\ x(m_t) = i_t,\ x(m) = i\} = P\{x(m+L) = j \mid x(m) = i\},$$

如果 $\{x(t)\}$ 是齐次的(即对一切状态 $i,\ j$，条件概率 $P\{x(m+L) = j \mid x(m) = i\}$ 与 m 的取值无关)则

$$P\{x(m+L) = j \mid x(m) = i\} = p_{ij}(L),$$

$p_{ij}(m+L) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(m) p_{kj}(L),\ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，其中 $p_{ij}(L)$ 为 L 步转移概率.

如果用矩阵 $P(m)$ 表示 m 步转移概率 $p_{ij}(m)$ 组成的矩阵，则 $p_{ij}(m+L) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(m) p_{kj}(L)$ 的矩阵表达式为 $P(m+L) = P(m)P(L)$，称为**柯尔莫哥洛夫—查普曼**方程，简记为 $K-C$ 方程.

特别地，$p_{ij}(2) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} p_{kj}\ (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 或者 $P(2) = PP = P^2$，同理有 $P(m) = P^m$.

设 $P\{x(m) = i\} = p_i(m),\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ m \geqslant 0$，其中 $p_i(m)$ 为系统经过 m

步转移后处于状态 i 的概率，则 $p_i(m)=\sum_{j=1}^{n}p_j(0)p_{ji}(m)=\sum_{j=1}^{n}p_j(L)p_{ji}(m-L)$ $(m\geqslant L)$ 记 $u^{(0)}=(p_1(0),\ p_2(0),\ \cdots,\ p_n(0))$ 为系统的初始状态向量，则 $u^{(m)}=u^{(0)}P(m)=u^{(0)}P^m$，$(m=1,\ 2,\ \cdots)$，称 $u^{(m)}$ 为系统经过 m 步转移后的分布，则 $u^{(0)}$ 为初始分布.

以上介绍了很多与马尔可夫决策相关的概念，下面我们将通过一个具体的例子看如何应用马尔可夫决策.

例4 某工厂一台自动加工机有两种工作状态：正常状态和故障状态. 在每个整数钟点的起始时刻检查机器的工作情况，若机器处于正常状态，则让它继续工作；若机器处于故障状态，则对它进行检修. 假设处于正常状态的机器，在1小时后发生故障的概率为0.05. 对于故障机器有两种检修方案可供选择，一种是加急检修，在1小时内排除故障的概率为0.9；一种是常规检修，在1小时内排除故障的概率为0.6. 已知这台机器正常工作1小时可收益10元，加急检修1小时费用为9元，常规检修1小时费用为6元. 那么，当机器出现故障时，应选择哪种检修方案排除故障?

分析与解：决策目标：使机器的生产获得最大的收益.

行动方案：d_1：加急检修；d_2：常规检修.

机器在任何整数钟点时可能出现的状态：h_1：正常状态；h_2：故障状态.

这里机器在第 n 小时的工作状态 X_n 是一个马尔可夫链，于是我们考察马尔可夫链 $\{X_n\}$ 在行动方案 d_1 和 d_2 下的转移概率矩阵.

行动方案 d_1 的转移概率矩阵为 $P_1=\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.9 & 0.1\end{pmatrix}$,

行动方案 d_2 的转移概率矩阵为 $P_2=\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$.

由此可见，马尔可夫链 $\{X_n\}$ 的转移概率矩阵与所采取的行动方案有关.

下面，我们考虑机器在时间段 $[n,\ n+1)(n\geqslant 0)$ 内的收益情况. 当机器在 n 时刻处于正常状态时，行动方案 d_1 和行动方案 d_2 在该时间段内的收益都是10元；当机器在 n 时刻处于故障工作状态时，行动方案 d_1 在该时间段内的收益是 -9 元，行动方案 d_2 在该时间段内的收益是 -6 元. 因此，机器在时间段 $[n,\ n+1)$ 内的收益矩阵为

$$\begin{matrix} & d_1 \quad d_2 & \\ Q= & \begin{pmatrix}10 & 10\\ -9 & -6\end{pmatrix} & \begin{matrix}h_1\\ h_2\end{matrix}\end{matrix}.$$

在行动方案 d_1 之下，可以计算机器各个时刻的概率分布. 例如，当机器最初为正常工作状态时，为初始分布

$$u^{(0)} = (p_1(0) \quad p_2(0)) = (1 \quad 0),$$

时刻 1 的分布为

$$u^{(1)} = (p_1(0) \quad p_2(0))P_1 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} = (0.95 \quad 0.05),$$

时刻 2 的分布为

$$u^{(2)} = u^{(2)} P_1 = (0.95 \quad 0.05)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} = (0.9475 \quad 0.0525),$$

时刻 n 的分布为

$$u^{(n)} = u^{(n-1)} P_1 = u^{(n-2)} P_1^2 = \cdots = u^{(0)} P_1^n,$$

所以，行动方案 d_1 在时间段$[n, n+1)$内的平均收益为

$$Q(d_1, n) = u^{(n)}\begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix} = u^{(0)} P_1^n \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix} = (p_1(0) \quad p_2(0))\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

类似地，行动方案 d_2 在时间段$[n, n+1)$内的平均收益为

$$Q(d_2, n) = u^{(n)}\begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix} = u^{(0)} P_2^n \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$= (p_1(0) \quad p_2(0))\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

如果我们只关心机器在时间段$[n, n+1)$内的收益，就可以通过比较 $Q(d_1, n)$ 和 $Q(d_2, n)$来作出决策，这可以使机器在该单位时间段内获得最大平均收益. 但是，这样获得的决策不一定能够保证在$[0, n+1)$时间段内获得最大平均收益. 例如，当机器最初为正常状态时，初始分布为(1　0)，表 4 列出了 $Q(d_1, n)$ 和 $Q(d_2, n)$的取值情况：

表 4　$Q(d_1, n)$和 $Q(d_2, n)$的各种取值情况

n	$Q(d_1, n)$	$Q(d_2, n)$	n	$Q(d_1, n)$	$Q(d_2, n)$
1	9.0500	9.2000	6	9.0000	8.7715
2	9.0025	8.9200	7	9.0000	8.7700
3	9.0001	8.8220	8	9.0000	8.7695
4	9.0000	8.7877	9	9.0000	8.7693
5	9.0000	8.7757	10	9.0000	8.7693

由表 4 可以看出，仅在时间段[1, 2)内，行动方案 d_2 的平均收益大于行动方

案 d_1 的平均收益. 按照机器在时间段[1, 2)内的平均收益最大准则选择行动方案,应该选择行动方案 d_2. 但是如果机器运行的时间超过 4 小时,行动方案 d_2 就不是平均收益最大的方案了(此时行动方案 d_2 在各个时间段内的平均收益之和小于行动方案 d_1 的平均收益之和).

一般地,在各行动方案所对应的状态随着时间的推移而形成马尔可夫链的情况下,可以根据情况确定选择最优决策的准则,然后利用马尔可夫链的性质来计算各行动方案的平均收益(风险),以选择最优决策. 这样的决策方法称为马尔可夫型决策方法. 在马尔可夫型决策方法中,常用的选择行动方案的准则包括:

短期准则:确定某一时刻 n,使得在$[0, n+1)$时间段内获得最大平均收益或最小风险;

长期准则:使得在$[0, +\infty)$时间段内获得最大平均收益或最小风险.

如果考虑短期效益,应该用短期准则选择行动方案;如果考虑长期效益,则应该用长期准则来选择行动方案.

3.4 长期准则下的马尔可夫型决策理论

定义 14.1 如果 n 时刻的分布 w 能使马尔可夫链在 n 以后各个时刻的分布相等,即 $w = wP$,其中 P 为该马尔可夫链的转移概率矩阵,则称 w 为该马尔可夫链的一个平稳分布.

比如,在例 4 中的行动方案 d_1 之下,假设 $w=(w_1 \quad w_2)$ 为$\{X_n\}$的平稳分布,则

$$\begin{cases}(w_1 \quad w_2)=(w_1 \quad w_2)\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.9 & 0.1\end{pmatrix},\\ w_1+w_2=1,\end{cases}$$

并且 $w_1 \geqslant 0$, $w_2 \geqslant 0$,则 $w=(w_1 \quad w_2)=\begin{pmatrix}\frac{18}{19} & \frac{1}{19}\end{pmatrix}$.

在行动方案 d_2 之下,假设 $w=(w_1 \quad w_2)$ 为$\{X_n\}$的平稳分布,则

$$\begin{cases}(w_1 \quad w_2)=(w_1 \quad w_2)\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix},\\ w_1+w_2=1,\end{cases}$$

并且 $w_1 \geqslant 0$, $w_2 \geqslant 0$,则 $w=(w_1 \quad w_2)=\begin{pmatrix}\frac{12}{13} & \frac{1}{13}\end{pmatrix}$.

例 5 甲、乙两名同学进行一场趣味乒乓球比赛,约定:每打 1 球,给获胜者记 1 分. 当甲同学比乙同学多赢 2 分时,甲同学获胜;当乙同学比甲同学多赢 1 分时,乙同学获胜. 已知每打 1 球,甲同学赢 1 分的概率为 $p=0.75$,乙同学赢 1 分的概

率为 $q=0.25$. 问在打了 n 个球后,若用 Y_n 表示甲同学与乙同学的得分之差,那么$\{Y_n\}$是马尔可夫链吗? 如果是,求其平稳分布(在打了 n 个球分出胜负的情况下,约定 $Y_{n+k}=Y_n$, $k=1, 2, \cdots$).

分析与解: 由题意知,Y_n 的可能取值为-1, 0, 1, 2. 在已知 $Y_n=i$, $(i=-1, 0, 1, 2)$ 的情况下,Y_{n+1}的分布与 n 个球之前两名同学的得分情况无关,所以$\{Y_n\}$具有马尔可夫性,即$\{Y_n\}$为马尔可夫链,其状态空间为$\{-1, 0, 1, 2\}$.

进一步地,设 $Y_{n+1}=j$, $(j=-1, 0, 1, 2)$,

则从状态 0 到状态 j 的转移概率为

$$p_{0j}=P(Y_{n+1}=j\mid Y_n=0)=\begin{cases}0.25, & j=-1,\\ 0.75, & j=1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则从状态 1 到状态 j 的转移概率为

$$p_{1j}=P(Y_{n+1}=j\mid Y_n=1)=\begin{cases}0.25, & j=0,\\ 0.75, & j=2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $Y_n=-1$时,乙同学获胜,比赛结束,这时可以认为 $Y_{n+1}=-1$,所有从状态-1 到状态 j 的转移概率为 $p_{-1j}=P(Y_{n+1}=j\mid Y_n=-1)=\begin{cases}1, & j=-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

类似地,从状态 2 到状态 j 的转移概率为 $p_{2j}=P(Y_{n+1}=j\mid Y_n=2)=\begin{cases}1, & j=2.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

因此,马尔可夫链$\{Y_n\}$的转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.25 & 0 & 0.75 & 0\\ 0 & 0.25 & 0 & 0.75\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

设$\{Y_n\}$的平稳分布 $w=(w_1\quad w_2\quad w_3\quad w_4)$. 将转移概率矩阵的表达式代入 $w=wP$, 得

$$\begin{cases}w_1+0.25w_2=w_1,\\ 0.25w_3=w_2,\\ 0.75w_2=w_3,\\ 0.75w_3+w_4=w_4,\\ w_1+w_2+w_3+w_4=1,\end{cases}$$

解方程组，得其非负解为 $w_1=a$, $w_2=0$, $w_3=0$, $w_4=1-a$，其中 $a\in[0,1]$. 因此，$\{Y_n\}$ 有无穷多个平稳分布.

给定一个马尔可夫链，它有唯一的平稳分布的充分必要条件是方程组 $w=wP$ 有唯一的非负解. 因此，只要方程组 $w=wP$ 有唯一的非负解，则无论初始分布是什么，随着时间的推移，该马尔可夫链在时刻 n 的分布都会稳定于唯一的平稳分布.

在长期准则中，平稳分布的作用相当于风险型决策中的状态分布. 在这种观点之下，用长期准则进行决策的方法就基本等价于风险型决策，只是这里的平稳分布需要利用马尔可夫性计算. 由于在长期准则中平稳分布起着重要的作用，因此也把长期准则称为平稳准则.

用平稳准则进行马尔可夫型决策的具体实施步骤如下：

第一步，根据问题的背景，确定所研究的对象是否可以用马尔可夫链描述. 如果可以，就明确问题的决策目标，然后执行第二步；否则，选用其他决策方法.

第二步，确定马尔可夫链所有可供选择的行动方案、可能出现的状态、损益函数或损益矩阵.

第三步，对于给定的行动方案，确定马尔可夫链在该行动方案下的转移概率矩阵，用 $w=wP$ 判断相应的平稳分布是否唯一.

第四步，如果各个行动方案所对应的平稳分布都唯一，就可以用平稳准则选择行动方案.

例6 （广告方案的选择）某公司为了扩大一项产品的市场，以相同的成本制作了两个不同风格的电视广告，长度都是 20 秒. 为了了解广告的播出效果，该公司在两个地区进行了实验，发现顾客群的转移规律如下：

1. 在这两个地区没有播出广告之前，该公司的顾客群中有 40%转为其他公司的顾客；而其他公司的顾客群中有 20%转为该公司的顾客.

2. 在第 1 个实验区播出第 1 个广告一段时间后，该公司的顾客群中有 30%转为其他公司的顾客；而其他公司的顾客群中有 20%转为该公司的顾客.

3. 在第 2 个实验区播出第 2 个广告一段时间后，该公司的顾客群中有 20%转为其他公司的顾客；而其他公司的顾客群中有 10%转为该公司的顾客.

该公司面临的决策是：是否应该播出广告；如果决定播出，应该选用哪一个广告？

分析与解：根据这个问题的实际背景，可以认为消费者对产品的选择随时间的变化而变化，具有马尔可夫性，并且我们需要考虑的是广告的长期效益.

共有 3 种行动方案可供选择：d_1：不播出广告；

d_2：播出第 1 个广告；

d_3：播出第 2 个广告.

共有 2 种不同的状态：h_1：顾客选择该公司的产品；

h_2：顾客选择其他公司的产品.

我们可以认为，当顾客选择该公司的产品时，该公司就获得收益，否则该公司的收益为 0. 因此，收益函数可定义为

$$q(d_1, h_1) = 1,\ q(d_1, h_2) = 0,$$
$$q(d_2, h_1) = 1,\ q(d_2, h_2) = 0,$$
$$q(d_3, h_1) = 1,\ q(d_3, h_2) = 0,$$

收益矩阵为 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由顾客转移规律 1 知：当选择行动方案 d_1 时，马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

由顾客转移规律 2 知：当选择行动方案 d_2 时，马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

由顾客转移规律 3 知：当选择行动方案 d_3 时，马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

当选择行动方案 d_1 时，平稳分布为$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. 因此，行动方案 d_1 所对应的平稳平均收益为 $Q(d_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$.

当选择行动方案 d_2 时，平稳分布为$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. 因此，行动方案 d_2 所对应的平稳平均收益为 $Q(d_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}$.

当选择行动方案 d_3 时，平稳分布为$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. 因此，行动方案 d_3 所对应的平稳平均收益为 $Q(d_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$.

所以应该选用行动方案 d_2，即“播出第 1 个广告”.

本章思考题

1. 根据气象预报，某地区近期有小洪水的概率为 0.25，有大洪水的概率为 0.01.

该地区某工地上有一台大型设备，遇到大洪水时要损失 6 0000 元，遇到小洪水时要损失 1 0000 元. 为保护设备，有以下 3 种方案可供选择：

方案 1：运走设备，搬运费为 3800 元；

方案 2：建设保护围墙，建设费为 2000 元，但围墙只能防小洪水；

方案 3：不采取措施，希望不发生洪水.

(1) 你会选择哪个方案？为什么？

(2) 如果小洪水的概率不变，大洪水的概率为 p，试进行敏感性分析.

2. 某地的农业银行对每笔 5000 元的借款申请有三种处理方法：

① 不检查信用，立即按申请办理；

② 在草率地检查信用后，同意或不同意申请；

③ 在广泛地调查信用后，同意或不同意申请.

下面是与问题有关的数据：

②的信用检查费 10 元；

③的信用调查费 200 元.

付还借款的利息收入 1000 元；

不付还借款的损失 5000 元(假定所有借款只有不付还和全部还清两种情况).

农行以前的营业资料表明 80%的借款可以付还.

经草率检查为"信用好"的申请人占$\frac{6}{7}$，付还借款的概率是 0.9；

经草率检查为"信用差"的申请人占$\frac{1}{7}$，付还借款的概率是 0.2.

经广泛调查为"信用好"的申请人占$\frac{4}{5}$，付还借款的概率是 1；

经广泛调查为"信用差"的申请人占$\frac{1}{5}$，付还借款的概率是 0.

试用决策树帮助农行决定使用哪种处理方法.

3. 某地区有甲、乙、丙三家公司，历史上三家产品分别拥有该地区 50%，30%，20%的市场. 不久前丙公司制定一项将甲、乙公司顾客吸引到本公司的销售与服务方针. 市场调查表明，在丙公司新方针影响下，一个季度后，甲公司顾客只有 70%仍购买甲产品，而 10%，20%的顾客分别转向乙、丙；公司乙将有 80%老顾客，余下各一半转向甲、丙；丙公司保持 90%老顾客，余下各一半转向甲、乙. 设销售趋势一直不变.

(1) 求一步转移概率矩阵；

(2) 求三个公司在第一季度、第二季度拥有的销售份额；

(3) 求三个公司最终拥有的销售份额.

本章参考文献

[1] 焦宝聪,陈兰平.运筹学的思想方法及应用[M].北京大学出版社,2008.
[2] 李瑛.决策统计分析[M].天津大学出版社,2005.
[3] 课程教材研究所.数学选修4 9风险与决策[M].人民教育出版社,2008.

第十五章 趣味图论

本章我们将从两个角度即数学竞赛与数学建模来讨论图论问题.

§1 数学竞赛中的图论问题

图论中研究的图可以看成是具体问题的抽象化. 例如:一群人中,有的两个人是相互认识的,有的是互相不认识的;若干个大城市,有的两个城市之间有航线相通,有的没有航线相通;平面上的一个点集合,其中有的任意两点距离为 1,有的两点距离不为 1. 在上面这些问题中,都包含两方面的内容:其一是一些"对象",如:人,城市,点等;其二是这些对象两两之间的某种特定关系,如:认识,通航,距离为 1. 为了表示这些对象和他们之间的关系,我们可以用一个点表示一个对象,称这些点为顶点;如果两个对象之间有所讨论的关系,就在相应的两点之间连上一条线,称这些线为边. 这样就构成了一个图.

1.1 图论中的图与中学几何里的图的区别

在图论直观的叙述定义中,并没有规定这些顶点的位置以及边的曲直长短,也没有规定这些边以及顶点都要在同一个平面内,并且要求作为连结两点的边不要通过第三点,也不要与自己相交,研究的是蕴涵在图形中的点之间的关系. 中学里的图强调的是形,即位置,曲直长短,大小等.

在图论中注重同构关系. 如果两个图 G 与 G' 的顶点之间可以建立起一一对应,并且 G 中连结顶点 v_i 与 v_j 之间的边数相邻情况与 G' 中的相应的顶点相邻的情况相同时,称图 G 与 G' 是同构的,认为 G 与 G' 是相同的图.

图论研究方向的主要分类:组合图论、代数图论、极值图论、拓扑图论和随机图论.

图论中的主要证明方法有直接分具体的各种情况进行验证、归纳法(对顶点数 n 或者边数 m 进行归纳)、反证法和构造法(构造特殊图类进行论证).

1.2 基本概念

图论是以图作为研究对象的一个数学分支，因此关于图的一些基本概念和性质我们需要了解.

定义 15.1 所谓图是指由一些点以及连结这些点对的一些线段构成的图形，用来直观地表示具有某种二元关系的集合.

定义 15.2 若在一个图 G 中的两个顶点 v_i 与 v_j 之间有边 e 相连，则称点 v_i 与 v_j 是相邻的，否则就称点 v_i 与 v_j 是不相邻的.

定义 15.3 如果顶点 v 是边 e 的一个端点，称点 v 与边 e 是关联的.

定义 15.4 有些顶点自身也有边相连，这样的边称为环.

定义 15.5 连结两个顶点的边有时可能不止一条，若两个顶点之间有 $k(k \geqslant 2)$ 条边相连，则称这些边为平行边.

定义 15.6 如果一个图没有环，并且没有平行边，这样的图称为简单图.

在简单图中，连结顶点 v_i 与 v_j 之间的边可用 (v_i, v_j) 表示. 当然，(v_i, v_j) 与 (v_j, v_i) 表示的是同一条边.

定义 15.7 如果一个简单图中，任意两个顶点之间都有一条边，这样的图称为完全图. 通常将有 n 个顶点的完全图记为 K_n.

根据定义，可以直接得到完全图的边的数目是 $\frac{n(n-1)}{2}$.

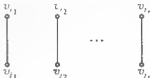
定义 15.8 在图 $G=(V, E)$ 中，若顶点个数 $|V|$（$|V|$ 也称为 G 的阶）和边数 $|E|$ 都是有限的，则称图 G 是有限图. 如果 $|V|$ 或 $|E|$ 是无限的，则称 G 为无限图.

除非特别说明，我们所说的图都是指有限简单图.

例 1 某大型聚会有 605 个人参加. 已知他们每一个人都至少和其中的另一个人握过手. 证明：必有一个人至少和其中两个人握过手.

分析与证明： 本例要证明的是必有一个人至少和其中两个人握过手. 倘若不然，则每一个至多和其中一个人握过手，再从题设的每一个人都至少和其中的另一个人握过手，于是便有，每一个人恰与其他另一个人握过手. 将 605 个人用 605 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_{605}$ 表示，如果其中两个人握过手，就在相应的顶点之间连一条边，图 G 恰由若干个两点间连一条边的图形构成.

设图 G 有 r 条边，则 G 便有 $2r$（偶数）个顶点，这与 G 的顶点数为 605（奇数）矛盾. 本例得以证明.



定义 15.9 图 G 中与顶点 v 关联的边数（约定环计两次）称为图 G 中顶点 v 的度（或次数），记为 $d_G(v)$.

在不致混淆的时候，简记为 $d(v)$. 我们用 $\delta(G)$ 与 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中顶点的最小度和最大度，也分别简记为 δ 和 Δ.

定理 15.1 设 G 是 n 阶图，则 G 中 n 个顶点的度之和等于边数的两倍. 记 G 中的 n 个顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，边数为 e，则

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=2e.$$

定理 15.2 对于任意的图 G，奇顶点(从一个顶点引出的边数为奇数条的顶点称为奇顶点)的个数一定是偶数.

例 2 一条河的两岸有一些城市，城市的总数不少于 3 个. 城市由一些航线连结着，每条航线将位于两岸的一对城市联系在一起，每个城市恰好与另一边的 k 个城市连结. 人们可以在任何两座城市之间往来. 证明：如果航线中有一条被取消，人们还是可以在任何两座城市之间往来(1996 年第 10 届伊朗数学奥林匹克试题).

证明：不妨称河的两岸分别为北岸和南岸. 北岸的 n 个城市用点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示，其中全体记为 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$；南岸的 m 个城市用点 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 表示，其中全体记为 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$.

如果北岸的城市 x_i 与南岸的城市 y_j 之间有航线，则连结成为边 (x_i, y_j)，所有的边组成的集合记为 E. 这就得到了一个有顶点集 X, Y 与边集 E 构成的图，称为二部图，也称为偶图，记为 $G=(X, Y; E)$.

题中的后两个条件即是：由任一顶点引出的边是 k 条；图 G 是连通的，即任意两个顶点之间都有若干条边连结而成的路. 题目的结论是：从 E 中删去任意一条边 e，图 $G'=(X, Y; E-e)$ 仍然是连通的.

因为每个顶点恰与 k 条边相关联，所以有 $|X|k=|E|=|Y|k$，其中 $|X|$, $|E|$, $|Y|$ 表示集合 X, E, Y 中元素的个数. 于是有 $|X|=|Y|$，即 $n=m$. 又因 $|X|+|Y|\geqslant 3$，所以 $|X|=|Y|\geqslant 2$.

现去掉 G 的一条边，得到的图为 G'. 若 G' 不连通，则 G' 由两个连通部分 G_1, G_2 构成.

设
$$X=X_1\cup X_2,\ X_1\cap X_2=\varnothing,$$
$$Y=Y_1\cup Y_2,\ Y_1\cap Y_2=\varnothing,$$
$$G_1=(X_1, Y_1; E_1),\ G_2=(X_2, Y_2; E_2).$$

去掉的一条边是连结 X_1 与 Y_2 的顶点，则

$$|X_1|k-1=|E_1|=|Y_1|k,$$
$$|X_2|k=|E_2|=|Y_2|k-1,$$

从而 $(|X_1|-|Y_1|)k=1$，得到 $k=1$.

又 G 连通，则 $|X|=1$，与 $|X|\geqslant 2$ 矛盾. 故 G' 连通，从而结论成立.

1.3 托兰定理

1941 年,匈牙利数学家托兰(Turan)为了回答这样的问题:"n 个顶点的图 G 不包含 m 个顶点的完全图 K_m,则图 G 的最大边数是多少?"而提出的著名定理,从而开创了图论研究的一个新方向"极图理论",极图理论是近年来图论中比较活跃的分支之一.

定义 15.10 如果图 G 的顶点集 V 可以分解为 k 个两两不交非空子集的并,即

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k,\ V_i \cap V_j = \varnothing,\ i \neq j,$$

并且没有一条边,其两个端点都在上述同一子集内,我们称这样的图 G 为 k 部图. 记为 $G = (V_1, V_2, \cdots, V_k;\ E)$.

定义 15.11 如果在一个 k 部图 $G = (V_1, V_2, \cdots, V_k;\ E)$ 中,$|V_i| = m_i$. 任何两点 $u \in V_i$, $v \in V_j$, $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, k)$,均有 u 和 v 相邻,则称 G 是完全 k 部图,记为 $K_{m_1, m_2, \cdots, m_k}$.

定理 15.3 有 n 个顶点且不含三角形的图 G 的最大边数为 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

定理 15.4 设 n 阶图 G 不含 K_{m+1},则 G 的边数 $e(G) \leqslant e_m(n)$,其中 $e_m(n) = C_{n-k}^2 + (m-1)C_{k+1}^2$, $k = \left[\frac{n}{m}\right]$.

例 3 在有 8 个顶点的简单图中,没有四边形(即由四点 A, B, C, D 和四条边 AB, BC, CD, DA 组成的图)的图的边数的最大值是多少(1992 年中国数学奥林匹克试题)?

解:首先,如图 1 所示,图中有 8 个顶点和 11 条边,但其中没有四边形. 下面我们证明:若一个简单图有 12 条边,则其中一定含有四边形.

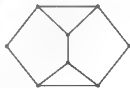


图 1

首先指出两个明显事实:

(a) 设 $A \neq B$ 是两个顶点. 如果点 A 与点 C_1, $\cdots$, C_k 均有边相连,B 至少与 $\{C_1, \cdots, C_k\}$ 中的两点分别有边相连,则图中必有四边形.

(b) 如果 4 点之间连有 5 条边,则图中必有四边形.

设有 8 个顶点,12 条边的图中没有四边形,其中点 A 是引出边最多的顶点之一.

(1)设 A 共引出 $s \geqslant 5$ 条边,与 A 有边相连的顶点的集合为 S,除点 A 及 S 中

的点之外的所有顶点的集合记为 T. 于是由(a)和(b)知,S 中点之间连线数不超过 $\left[\frac{s}{2}\right]$,T 中点之间连线数至多为 $C_{|T|}^2$,S 与 T 之间连线数至多为 $|T|$. 因而,图中连线总数至多为

$$s+\left[\frac{s}{2}\right]+|T|+C_{|T|}^2=7+\left[\frac{s}{2}\right]+C_{|T|}^2.$$

当 $s\geqslant 5$ 时,边数小于 12,矛盾.

(2) 点 A 恰引出 4 条边:$AA_j(j=1,2,3,4)$. 设另外 3 点是 B_1, B_2, B_3. 于是$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$之间至多有两条边,$\{B_1, B_2, B_3\}$之间至多有 3 条边,这两个点集之间至多 3 条边. 因为图中共有 12 条边,故知 3 类边数恰分别为 2, 3, 3. 不妨设第 3 组的 3 条边为 $A_jB_j(j=1,2,3)$. 因为第 1 组有两条边且二者没有公共端点,故$\{A_1, A_2, A_3\}$之间有一条边,不妨设为 A_1A_2,于是 $A_1A_2B_2B_1$ 为四边形,矛盾.

(3) 点 A 恰引出 3 条边,从而每点都引出 3 条边. 设点 A 和 B 之间没有连线,两点各引出的 3 条线分别为 AA_j, $BB_j(j=1,2,3)$. 于是由(a)知$\{A_1, A_2, A_3\}$与$\{B_1, B_2, B_3\}$至多有 1 个公共点.

如果两者没有公共点,则它们的各 3 点间都至多有一条边,两个三点集之间至多有 3 条连线. 从而图中连线总数至多为 11,矛盾.

如果两个三点集之间恰有 1 个公共点,则考察第 8 点 C. 由抽屉原理知,它引出的 3 条边中必有两条引向同一个三点集,这导致四边形,矛盾.

综上,我们证明了在有 8 个顶点和 12 条边的图中必有四边形,从而所求边数的最大值为 11.

1.4 树

在各种各样的图中,有一类简单而重要的图,就是所谓的"树".

定义 15.12 在图 G 中,一个由不同的边组成的序列 e_1, e_2, …, e_m. 如果其中的 $e_i=(v_{i-1}, v_i)$, $i=1, 2, \cdots, m$, 称这个序列是从点 v_0 到 v_m 的链. v_0 与 v_m 称为这条链的端点,并且记这条链为 $v_0v_1\cdots v_m$.

定义 15.13 如果一条链的两个端点 v_0 与 v_m 重合,称这条链为圈.

定义 15.14 一个连通且没有圈的图称为树. 通常用字母 T 来表示树.

定义 15.15 一个不含圈的图必定是由一个或者数个顶点不交的树所组成的,我们称这样的图为森林.

定理 15.5 如果树 T 的顶点数$\geqslant$2,则 T 中至少有两个悬挂点(度为 1 的点).

定理 15.6 设树 T 的顶点数为 n,则它的边数 $e=n-1$.

定理 15.7 设 T 是有 n 个顶点，e 条边的图. 则下述三个命题是等价的：

(1) 图 T 是树.

(2) 图 T 无圈，并且 $e=n-1$.

(3) 图 T 连通，并且 $e=n-1$.

例4 在一次演讲中，有五名数学家每人均打两次盹，并且每两人均有同时打盹的时刻. 证明：一定有三个人，他们有同时打盹的时刻.

证明：作图 G：用 v_1，v_2，…，v_{10} 这 10 个顶点表示这五位数学家的十次盹，当且仅当第 i 次盹与第 j 次盹有共同时刻时，在 v_i 与 v_j 之间连一条边. 由题意，每两个数学家均有同时在打盹的时刻，从而图 G 中的边数至少是 $C_5^2=10$ 条. 而图 G 的顶点数为 10，故 G 中必有圈.

设这个圈为 v_{i_1}，v_{i_2}，…，v_{i_k}，v_{i_1}，且 v_{i_1} 是圈中最先结束的一个盹，那么当 v_{i_1} 刚结束时，v_{i_2} 及 v_{i_k} 还在进行，这就证明了有三个数学家有同时打盹的时刻.

1.5 欧拉问题

欧拉(Euler)问题起源于著名的七桥游戏. 位于欧洲的哥尼斯堡的普莱格尔河有两个岛 A 与 D，河上有七座桥连接这两个岛和河的两岸 B 与 C(图 2). 问：一个旅游者能否通过每座桥一次而且仅有一次.

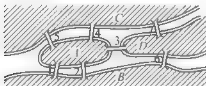


图 2

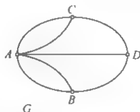


图 3

欧拉把问题转化为一笔画问题：能否一笔画出这个图，使每条边都没有遗漏也没有重复？而一笔画出的图并未一定要求最后回到原来的出发点. 如图 3 所示. 该问题的解决需要用到下面的定理.

定理 15.8 有限图 G 可以一笔画的充要条件是：G 是连通的，并且奇顶点的个数等于 0 或 2. 当且仅当奇顶点的个数等于 0 时，连通图 G 是一个圈(回到原来的出发点).

回到上面的欧拉问题，从图 3 可以发现它是一个连通图，一共有 4 个顶点且每个都是奇数，根据定理 15.8，该图无法一笔画出，即一个旅游者不能通过每座桥一次而且仅有一次.

定理 15.9 如果连通图 G 有 $2k$ 个奇顶点，则图 G 可以用 k 笔画成，并且至

少要用 k 笔才能画成.

例5 图 4 是一幢房子的平面图形,前门进入是一个客厅,由客厅可通向四个房间,如果现在你由前门进去,能否通过所有的门走遍所有的房间和客厅,然后从后门走出,而且要求每扇门只能进出一次.

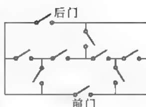


图 4

解: 从结果来说是否定的. 因为把 5 个房间以及前门外面和后门外面作为顶点,两个地方有门相通就在相应的顶点之间连一条边,得到图 G,在图 G 中,奇顶点的个数是 4,故 G 不是一条链,所以问题的答案是否定的.

1.6 哈密顿问题

1856 年,英国著名数学家哈密顿(Hamilton)提出一个名为"环游世界"的游戏. 他用一个正十二面体(图 5)的二十个顶点代表二十个大城市,要求沿着棱,从一个城市出发,经过每个城市恰好一次,然后回到出发点(图 6).

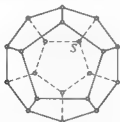


图 5

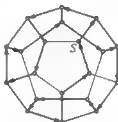


图 6

定义 15.9 图中若存在一链,它经过图上各个顶点一次且仅有一次,这条链就称为哈密顿链(圈). 一个图若包含哈密顿链,则称这个图是哈密顿图.

从表面上看,哈密顿问题和欧拉问题很相似,但实质有根本区别,是图论中尚未解决的困难问题之一. 至今没有充要条件,只是针对不同类型的题目有不同的判断方法. 不过,几个充分条件已经知道.

定理 15.10 设 G 是 n $(n \geqslant 3)$ 阶的简单图,并且对于它的每一对结点 u, v 都有

$$d(u)+d(v) \geqslant n-1,$$

则图 G 存在哈密顿链.

定理 15.11 设 G 是 n $(n \geqslant 3)$ 阶的简单图,若它的每个结点 v 的度都满足

$$d(v) \geqslant \frac{n}{2},$$

则图 G 存在哈密顿链.

例6 有7种不同的工作,在一周内每天安排一人完成其中的一种,并且每人所能承担的工作不超过其中的4种.试证,要由同一人承担的两项工作不排在接连的两天里是可行的.

分析与证明: 用结点 $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_7$ 表示7种不同的工作,如果结点 v_i, $v_j(i\neq j)$ 对应的两种工作不是同一个人所能承担的,则在 v_i 与 v_j 之间连一条边.将由此作出的7阶简单图,记作 G.因为每个人所能承担的工作不超过4种,所以每个结点都能与其余6个结点中至少3个结点用边相连.因此,

$$d(v_i)\geqslant 3(i=1, 2, \cdots, 7).$$

于是 $d(v_i)+d(v_j)\geqslant 6=7-1, i\neq j, i, j=1, 2, \cdots, 7.$

由上述定理15.10知,图 G 存在哈密尔顿链.由作图可知,该链上任何一对邻接点所表示的两种工作都不是同一个人所能承担的.所以,按照这条哈密尔顿链上结点的顺序安排这7种工作,就可使要由同一人承担的两项工作不排在接连的两天里.

例7 n 个人参加一次会议,在会议期间,每天都要在一张圆桌上共进晚餐.如果要求每次晚餐就座时,每个人相邻就座者都不相同,问这样的晚餐最多能进行多少次?

证明: 用 n 个点表示 n 个人,作完全图 K_n,则 K_n 中的一个哈密顿圈就是一次晚餐的就座方法.可见,晚餐最多能进行的次数就是 K_n 中无公共边的哈密顿圈的个数.

K_n 中有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边,每个哈密顿圈有 n 条边,因此,边不相重的哈密顿圈最多有 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个.当 $n=2k+1$ 时,将顶点 $0, 1, 2, \cdots, 2k$ 排列如图.先取一个哈密顿圈 $(0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1, 4, \cdots, k+3, k, k+2, k+1, 0)$,然后绕 O 点依次顺时针旋转 $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \cdots, \frac{(k-1)\pi}{k}$,共产生 $k=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个无公共边的哈密顿圈,如果 $n=2k+2$,那么每次在中间添加一个顶点 v,同样有 k 个哈密顿圈.

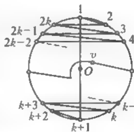


图7

1.7 拉姆赛(Ramsey)问题

通常我们把与图的染色、拉姆赛数、抽屉原则有关的问题称为拉姆赛(Ramsey)问题.比如"证明在任何六个人中,总可以找到三个互相认识或者三个互相不认识的人"的问题就属于上述问题.

我们用六个顶点表示六个人,如果某两个人互相认识,就在相应的两点之间连

上一条边并且涂上红色；如果某两个人互相不认识，就在相应的两点之间连上一条边并且涂上蓝色. 要证明的结论就是这个涂了色的中 K_6 中一定有一个各边同色的三角形.

定义 15.17 用 k 种颜色 C_1, C_2, …, C_k 去染完全图 K_n 的边，每条边只染其中的一种颜色，这样得到的完全图 K_n 简称为 k 色完全图 K_n. 当阶数 n 充分大时，k 色完全图 K_n 中必然会出现同色三角形. 使得每一个 k 色完全图 K_n 都含同色三角形的最小 n 记为 r_k. r_k 的存在性由英国数学家 Ramsey 首先证明，所以 r_k 叫做 Ramsey 数.

定理 15.12 两色的完全图 K_n 必存在同色三角形的最小 n 是 6.

定理 15.13 (1) 对每一个正整数 k, r_k 存在，并且当 $k \geqslant 2$ 时，

$$r_k \leqslant k(r_{k-1} - 1) + 2.$$

(2) 对一切自然数 k, $r_k \leqslant 1 + 1 + k + k(k-1) + \cdots + \frac{k!}{2!} + \frac{k!}{1!} + k!$.

定理 15.14 (1) $r(2, q) = q$, $r(p, 2) = p$;

(2) $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$ 时, $r(p, q) \leqslant r(p, q-1) + r(p-1, q)$.

定理 15.15 当 $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$ 时, $r(p, q) \leqslant C_{p+q-2}^{p-1}$.

例 8 空间中的六个点，任意三点不共线，任意四点不共面，成对地连结它们得到十五条线段. 用红色或蓝色染这些线段（一条线段只染一种颜色），求证：无论如何染色，总存在同色三角形.

证明：设 A_1, A_2, …, A_6 是所给的六点. 考虑由 A_1 出发的 5 条线段 A_1A_2, A_1A_3, …, A_1A_6. 因这 5 条线段只有红、蓝两种颜色，因此至少有 3 条染成同一种颜色. 不妨设这 3 条线段就是 A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4，且它们都染成红色（实线表示红色，虚线表示蓝色）. 若 $\triangle A_2A_3A_4$ 三边都是蓝色（如图 8 所示），它即为同色三角形.

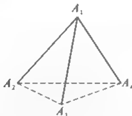


图 8

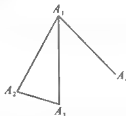


图 9

若 $\triangle A_2A_3A_4$ 至少有一条边，例如 A_3A_2（如图 9 所示）为红色，则 $\triangle A_1A_2A_3$ 是同色三角形. 总之，无论是哪种情况，都有同色三角形.

高的要求 知识的不断更新、更加开放、没有统一的答案、甚至没有对错，与传统观点有时会有冲撞，因此更需要注重探索，鼓励探索，尤其是不成熟的探索. 顺带提一下数学建模与应用题还是有区别的，主要表现在前者注重开放性，后者关注应用性；应用题强调一个求解过程，而数学建模则要求全过程.

2.3 典型问题

在数学建模的教学中要突出趣味性、因材施教以及选择典型问题与猜想，比如：

2.3.1 哥尼斯堡七桥问题

哥尼斯堡是前苏联加里宁格勒的一个小城，流贯全城的普雷格尔河西岸和河中两个小岛有七座桥彼此相通. 如图 10 所示.

该城镇居民热衷于：从陆地任一地方开始，能否通过每座桥一次且仅一次就能回到原地.

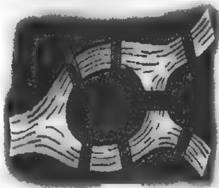


图 10

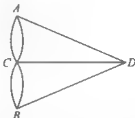


图 11

1763 年伟大的数学家欧拉将此难题转化为图论模型(如图 11). 由此可见这是不可能的，因为图中的每个点都只与奇数条线段关联，不可能将这个图不重复的一笔画成(1.5 节提到的七桥问题).

2.3.2 田忌、齐王赛马

齐王与田忌进行赛马. 双方约定：从各自的上、中、下三个等级的马中各选一匹参赛；每匹马只能参赛一次；每一次比赛双方各出一匹马，负者要付给胜者千金. 已经知道，在同等级的马中，田忌的马不如齐王的马，而如果田忌的马比齐王的马高一等级，则田忌的马可获胜. 田忌应采取什么对策才能获胜？答案如下：

1. 田忌的下马⟺齐王的上马；

§2 数学建模中的图论问题

2.1 引言

如今数学不仅在各门自然学科、技术和制造业、信息业和服务业等各种行业中有广泛的应用，而且在国民经济的规划和预测、自然资源的勘探、交通和物资调配、气象预报和各种灾害的预报，以及医学等许多领域中乃至日常生活中都显示出举足轻重的作用.

这一切促使人们对数学的重要性有了新的和更加深刻的认识. 联合国将 20 世纪的最后一年——2000 年列为“世界数学年”、“人类进入了数学工程技术的时代”. 在这样的背景下，以计算机为工具、应用数学知识解决实际问题的能力将成为新世纪青年重要的科学素质. 用数学解决实际问题，需要将现实问题归结为数学问题（又称建立数学模型或数学建模），然后选择合适的数学方法加以求解，对求得的结果用适当的方法加以验证，最后将结果应用于现实问题，对某些现象加以解释，或作出预测，或用于设计或控制某个过程等等.

1991 年，上海市工业与应用数学学会和上海市青少年科技教育中心决定举办上海市中学生数学知识应用系列活动作为对高中数学的改革和补充的一种探索，并自那一年开始，每年举行一次中学生数学知识应用竞赛. 这项活动每年都有 5000 多名中学生参加.

2.2 数学模型的定义及其特点

数学模型一般是用图形、符号所刻画的一个实际问题的模型；数学建模是一个全面的过程，主要有(1)将现实的问题归结为一个数学问题（建立数学模型），(2)选择合适的数学方法求解，(3)对求得结果进行验证，(4)将经过验证的结果应用到现实问题中，对一些问题加以解释、预测、设计、控制、决策等.

求解数学模型的能力包括对现有数学理论要有较全面地了解并具有应用现有能力；归纳刻画问题、归纳知识的能力；要有较好的计算机知识；要有很好的学习能力，新知识的检索、接受能力；对未知问题要有探索欲望和精神，也体现出解决问题的能力和创新精神. 因此对数学建模的学与教都比较特别，数学建模的学习主要有继承式和探究式两类. 继承式学习以掌握人类积累起来的知识为目的，以理解和记忆为主要手段. 探究式学习以培养学生解决问题的能力为目的，以学习归结问题、寻求解法、验证推广为手段. 由于数学建模问题的取材与生活、社会、经济相结合，涉及的领域广，问题的表述、求解等不拘形式，没有统一模式，因此. 对教师提出更

2. 田忌的中马⟺齐王的下马；

3. 田忌的上马⟺齐王的中马.

2.3.3 中国邮递员问题

一名邮递员负责投递某个街区的邮件. 如何为他(她)设计一条最短的投递路线(从邮局出发，经过投递区内每条街道至少一次，最后返回邮局)？

由于这一问题是我国著名运筹学家管梅谷教授于1960年首先提出的，所以国际上称之为"中国邮递员问题". 求解中国邮递员问题的口诀：

先分奇偶点，奇点对对联；
连线不重叠，重叠需改变；
圈上联线长，不得过半圈.

例9 在图12中从第一个点出发经过所有边至少一次，然后回到出发点，使得总长度最短.

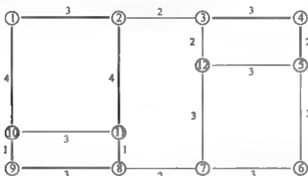


图12

分析与解：这问题的本质就是中国邮递员问题，按照其求解口诀第一步应该是"先分奇偶点，奇点对对联"，将八个奇点分为四组，如图13.

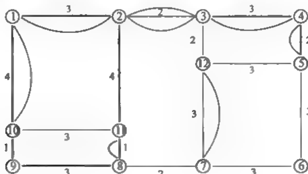


图13

然后是“连线不重叠，重叠需改变”，如图 14.

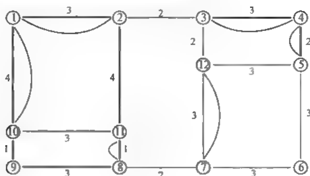


图 14

最后是“圈上联线长，不得过半圈”，如图 15 和图 16.

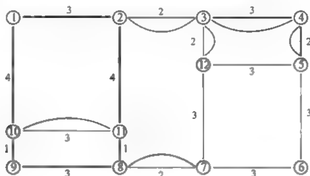


图 15

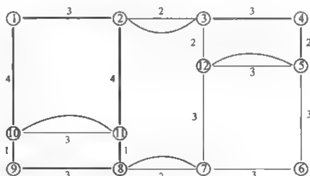


图 16

因此得到答案是：

我们得到一条行走路线：$v_1 \to v_{10} \to v_9 \to v_8 \to v_7 \to v_6 \to v_5 \to v_4 \to v_3 \to v_2 \to v_{11} \to v_{10} \to v_{11} \to v_8 \to v_7 \to v_{12} \to v_3 \to v_2 \to v_1$.

总长度是 52，其中有 20 是必须重复走的，这是最少的重走数量.

2.3.4 最小生成树问题

定义 15.18 在赋权图的边集之中选出一些边，既能把图上所有的点连结起来，又要使它们的边权之和达到最小称为最小生成树.

关于最小生成树的寻找方法可以参考克鲁斯卡尔"最小边加入法"，其基本思想：在原有的边中找一条长度最短的边加入到新的图中，继续找目前最短的边不断加入，但值得注意的是新加入的边不能与已经加入的边构成圈，如果将要构成圈，必须将该边舍去. 直到找到比点数少一的数目的边加入后，这样得到的图一定就是我们要找的最小生成树.

克鲁斯卡尔的"最小边加入法"算法步骤如下：

输入赋权无向连通图 $G=<V, E, W>$，其中 $|V|=n$，V 表示所有点的集合，E 表示所有边的集合，W 表示所有边的长度(权重)结合.

1. 取 G 的一条边 e，使得权重 $W(e)$ 最小；

2. 边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 选定后，从 $E-\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 中选边 e_{k+1} 满足以下两个条件：

(a) $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\}]$ 不含圈；

(b) 在满足(a)的前提下 $W(e_{k+1})$ 最小；

3. 步骤 2 不能进行时，则算法停止，并输出 $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}]$.

例 10 图 17 是上海邻近几个旅行城市的距离图，试问这几个城市间的最小生成树是什么？

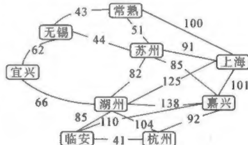


图 17

分析与解：此题我们就用克鲁斯卡尔"最小边加入法"来找最小生成树，根据其算法，最小边加入的次序为：

(1) 临安—杭州，41 千米；

(2) 无锡—常熟，43 千米；

(3) 无锡—苏州，44 千米；

(4) 无锡—宜兴，62 千米(尽管常熟到苏州为 51 千米，但这条边加入后，无锡、苏州、常熟构成了一个圈，所以常熟到苏州的边不能加入)；

(5) 宜兴—湖州，66 千米；

(6) 湖州—临安，85 千米；

(7) 苏州—嘉兴，85 千米；

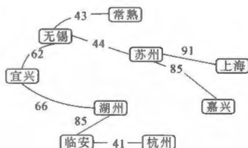


图 18

第十五章 趣味图论

(8) 苏州—上海,91 千米.

总长度为:517 千米.

例 11 某化学公司有八种产品:A, B, C, D, E, F, G, H. 已知:

A 不能与 B, G, H 放在一起;B 不能与 E, F, H 放在一起;

C 不能与 D, G, H 放在一起;D 不能与 E, F 放在一起;

E 不能与 F, G, H 放在一起;F 不能与 H 放在一起;

G 不能与 H 放在一起.

试问该公司至少需要建几个仓库来存放这八种产品?

分析与解:如图 19 所示,我们将八种产品用八个点表示,不能放在一起的两个产品,其对应点之间连一条边. 那么这个问题等价于求图中顶点最少需多少种颜色来染色,使得有边连结的任意两个顶点颜色不同

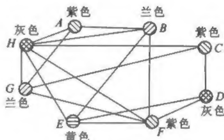


图 19

由图 19 可看出,B, E, F, H 不能放在一起. 因此,应建四个仓库,1—B, G;2—E, A, C;3—F;4—H, D.

例 12 一人带狗、鸡、米过河,除船需要人划外,最多只能载一物过河,当人不在时,狗要吃鸡、鸡要吃米,问人、狗、鸡、米应怎样过河?

分析与解:

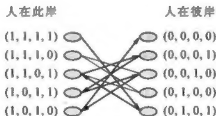


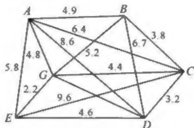
图 20

我们将状态向量中第一分量对应于人,第二分量对应于狗,第三分量对应于鸡,第四分量对应于米. 若某一物在此岸,则将状态向量中对应分量记为 0;反之在彼岸,则记为 0. 最后可得图 20,且可找到一组可行状态的转换.

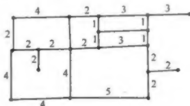
答案:(1, 1, 1, 1)—(0, 1, 0, 1)—(1, 1, 0, 1)—(0, 0, 0, 1)—(1, 0, 1, 1)—(0, 0, 1, 0)—(1, 0, 1, 0)—(0, 0, 0, 0).

本章思考题

1. 某区下属5个街道.它们的相对位置及距离由下图表示(单位:千米).区政府准备投资建设一个网络以传输内部文件.假定建设费用与距离成正比,请为它们设计一个费用最省的建造方案.



2. 三个商人带三名随从要乘一只最多能容纳二人的小船过河.随从们密约,在河的任一岸只要他们的人数超过商人就杀人越货,但乘船的安排权属于商人,并且商人们已经知道随从的这项密约.请你为商人制定一种安全过河的方案.
3. 一位邮递员的投递范围如下图所示(单位:百米).请为他设计最佳的投递路线.



4. 用直线构成的一个64个方格的棋盘,要用几笔才能画出所有的路线而不重复其中的任何一段?

本章参考文献

[1] 朱汉林.数学竞赛讲座[M].苏州大学出版社,2000.
[2] 王卫华.冲刺全国高中数学联赛[M].浙江大学出版社,2008.
[3] 吴康,刘芸.图论与中学数学竞赛(一)[J].中学数学,1987年11期.
[4] 李胜宏,李名德.高中数学竞赛培优教程(专题讲座)[M].浙江大学出版社,2003.
[5] 王慧兴.染色与染色方法(高中数学竞赛专题讲座)[M].浙江大学出版社,2008.
[6] 考克斯特著,杨应辰等译.数学游戏与欣赏[M].上海教育出版社,2001.
[7] 熊斌,郑仲义.数学奥林匹克小丛书.高中卷——图论[M].华东师范大学出

版社,2005.
[8] 上海市中学生数学知识应用竞赛组织委员会.中学数学建模与赛题集锦[M].复旦大学出版社,2008.
[9] 袁震东,蒋鲁敏,束金龙.数学建模简明教程[M].华东师范大学出版社,2002.
[10] 姜启源.数学模型[M].高等教育出版社,1992.
[11] 王文波.数学建模及其基础知识详解[M].武汉大学出版社,2006.
[12] 沈继红,施久玉,高振滨等.数学建模[M].哈尔滨工程大学出版社,2007
[13] 陈理荣.数学建模导引[M].北京邮电大学出版社,1999.